



# **MATHCAD**

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ**

Μεταπτυχιακός φοιτητής Τμήματος Οικονομικών Επιστημών

Στα πλαίσια του μαθήματος του αναπληρωτή καθηγητή Ιωάννη Δημητρίου  
«Εφαρμογές της Πληροφορικής στην Οικονομία»

ΑΘΗΝΑ 2002-2003

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ το φοιτητή Κωνσταντίνο Φραγκιαδάκη του τη συγγραφή των οδηγιών χρήσεως του Mathcad. Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μέρος της δουλειάς που έχει κάνει ο Κώστας στα πλαίσια μιας ευρύτερης εργασίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών Εφαρμοσμένης Οικονομικής και Οικονομικής Πολιτικής για το χειρισμό σύγχρονων πακέτων λογισμικού το 1998. Ο ΚΦ είναι από το 2002-03 φοιτητής του μεταπτυχιακού αυτού.

Το Mathcad χρησιμοποιείται κυρίως από ανθρώπους των πολυτεχνείων και των θετικών επιστημών. Έχουν αρχίσει όμως να το χρησιμοποιούν και κάποιοι οικονομολόγοι, όχι μόνο λόγω των αυτοματοποιήσεων που προσφέρει στις ποσοτικές μεθόδους, αλλά και των δυνατοτήτων που παρέχει για οικονομικές δυναμικές αναλύσεις.

Ο στόχος των σελίδων που περικλείομε είναι να παροτρύνουν τους φοιτητές του μαθήματος «*Εφαρμογές της Πληροφορικής στην Οικονομία*» στη χρήση του Mathcad και να σκεφθούν εφαρμογές του στην οικονομική ανάλυση και πρακτική.

Ι Κ Δημητρίου  
*Αναπληρωτής Καθηγητής*

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## A) Εισαγωγή στο Mathcad

1. Τι είναι το Mathcad?
2. Εγκαθιστώντας το Mathcad
3. Εκκινώντας το Mathcad
4. Γνωρίζοντας την οθόνη εισαγωγής δεδομένων του Mathcad

## B) Εφαρμογές και παραδείγματα

1. Πράξεις με αριθμούς
2. Μεταβλητές
3. Συναρτήσεις
4. Πίνακες και Ορίζουσες
5. Όρια
6. Παράγωγοι και Ολοκληρώματα
7. Γραφήματα
8. Έτοιμες συναρτήσεις από το Mathcad
  - a) Ρίζες πολυωνύμων
  - b) Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα
9. 3D-Graph

## Γ) Ασκήσεις

1. Απλές εφαρμογές
2. Προχωρημένες Ασκήσεις και Οικονομικές Εφαρμογές

# MATHCAD 7

## \* ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATHCAD \*

### Τι είναι το MATHCAD?

Το MATHCAD είναι το επικρατέστερο πρόγραμμα μαθηματικών για χρήση σε προσωπικό υπολογιστή. Το χρησιμοποιούν περισσότερο από 5 εκατομμύρια άνθρωποι, επιστήμονες, μαθηματικοί, καθηγητές πανεπιστημίου, σπουδαστές, μηχανικοί, οικονομικοί αναλυτές και άλλοι των οποίων η εργασία απαιτεί ένα ισχυρό εργαλείο για μαθηματικούς και τεχνικούς υπολογισμούς.

Η πρώτη έκδοση του Mathcad (version 1.0) κυκλοφόρησε το 1986 ώστε να παρέχει ένα προϊόν που θα γεφύρωνε το χάσμα μεταξύ του παλιού "τετραδίου και μολυβιού" και του μοντέρνου ηλεκτρονικού λογιστικού φύλλου. Το μολύβι και το τετράδιο ήταν ευέλικτα εργαλεία που επέτρεπαν στο χρήστη να απεικονίσει εξισώσεις χωρίς τις τεχνικές δυσκολίες που επέβαλλε ο υπολογιστής αλλά χρειαζόταν μεγάλη νοητική προσπάθεια. Όταν η λύση είχε βρεθεί, αλλαγές στο πρόβλημα ήταν ιδιαίτερα δύσκολες και κουραστικές. Τα λογιστικά φύλλα παρέκαμπταν αυτό το πρόβλημα κάνοντας αυτόματους υπολογισμούς με κάθε νέα εισαγωγή δεδομένων. Άσχετα με το πόσο σύνθετη ήταν η σχέση μεταξύ των αριθμών, όταν ένας αριθμός άλλαζε, όλα τα επηρεαζόμενα αποτελέσματα αυτόματα επανυπολογιζόταν. Ωστόσο, τα λογιστικά φύλλα έκρυβαν τους μαθηματικούς τύπους πίσω από τα 'κελιά' που απεικόνιζαν τα δεδομένα και γενικά ήταν σχεδιασμένα περισσότερο για "έσοδα-έξοδα" και άλλες λογιστικές εργασίες παρά για μαθηματικές όπως παραγωγή ή ολοκλήρωση.

Η εμφάνιση του Mathcad (συμπεριλαμβανόμενων και των νεότερων εκδόσεων) αποτέλεσε μια κομψή λύση για το παραπάνω πρόβλημα επιτρέποντας στους χρήστες να εισάγουν μαθηματικά σύμβολα και εξισώσεις ακριβώς όπως θα εμφανίζονταν σε ένα κομμάτι χαρτί, σε ένα πίνακα ή σε ένα βιβλίο. Αυτό επιτρέπει στο χρήστη να εργαστεί με τα μαθηματικά σε έναν υπολογιστή με τον μαθηματικό τρόπο με τον οποίο σκέπτεται. Επιπλέον, όταν ο χρήστης αλλάζει μία ή περισσότερες παραμέτρους της εξίσωσης, υπολογίζονται αυτόματα ακόμα και τα πιο πολύπλοκα αποτελέσματα. Για γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων, το Mathcad επανασχεδιάζει αυτόματα το γράφημα ώστε να αντικατοπτρίζει τις νέες αλλαγές.

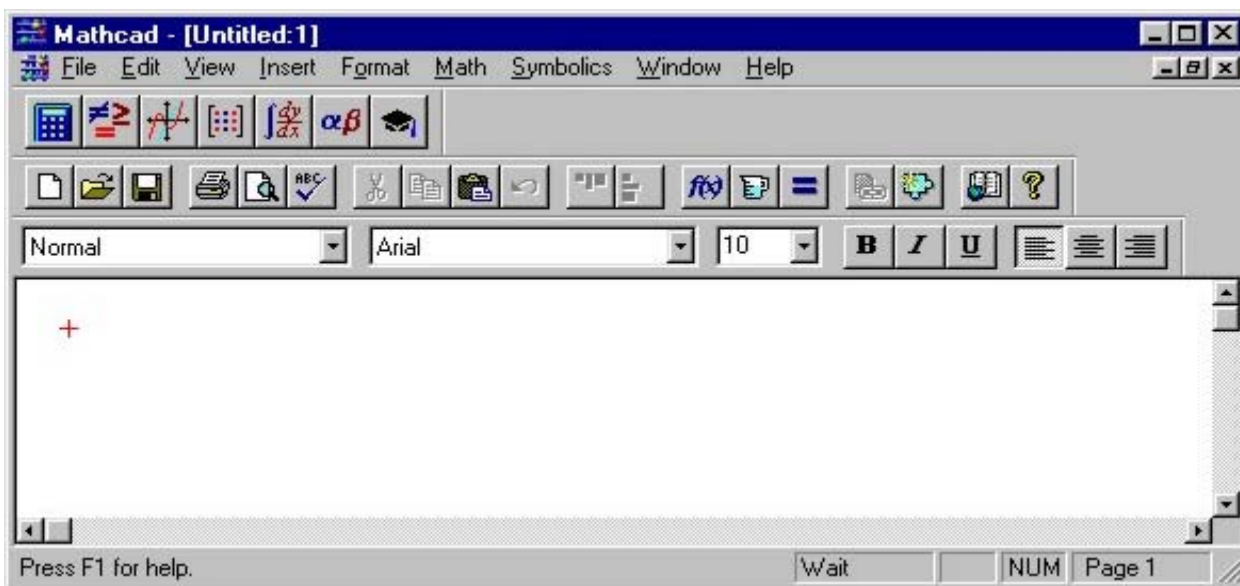
Το Mathcad έχει ανακηρυχθεί ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για όποιον χρησιμοποιεί εξισώσεις ή προσπαθεί να μάθει. Οι διάφορες εκδόσεις του έχουν συμπεριληφθεί στις λίστες των καλύτερων προγραμμάτων και έχει επιλεγεί ως το αποδοτικότερο στην κατηγορία του από περιοδικά του χώρου.

### Εγκαθιστώντας το Mathcad.

Η διαδικασία της εγκατάστασης εξαρτάται από την εκάστοτε ρύθμιση του υπολογιστή και από την έκδοση του MathCAD. Οι λεπτομέρειες περιγράφονται στο φυλλάδιο που εσωκλείεται με το πρόγραμμα. Ένας τρόπος να ξεκινήσει η εγκατάσταση είναι να εισάγετε το CD του Mathcad, να πάτε στο menu start/settings/control panel και από εκεί διαλέξετε "προσθαφαίρεση προγραμμάτων" και ακολουθείστε τις οδηγίες επί της οθόνης.

### Εκκινώντας το Mathcad.

Από το μενού Start/Programs των Windows 95/98 επιλέξετε Mathsoft/ Mathcad. Το πρόγραμμα θα εκκινήσει ένα νέο κείμενο στην οθόνη με ένα κόκκινο δρομέα με τη μορφή σταυρού, ο οποίος υποδεικνύει το μέρος όπου θα αρχίσει η εισαγωγή δεδομένων. Για να μετακινήσετε τον δρομέα, ώστε να ξεκινήσετε την εισαγωγή αλλού, απλώς μετακινήστε τον δρομέα του ποντικιού και κάντε κλικ στο επιθυμητό σημείο. Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα πλήκτρα μετακίνησης (arrow keys) του πληκτρολογίου.



Εικόνα 1

### Γνωρίζοντας την οθόνη εισαγωγής δεδομένων του Mathcad.

Ξεκινήστε κοιτάζοντας την Εικόνα 1, η οποία είναι ακριβές αντίγραφο της εικόνας υποδοχής του Mathcad 7 Student Edition που τρέχει σε λειτουργικό Microsoft Windows 98.

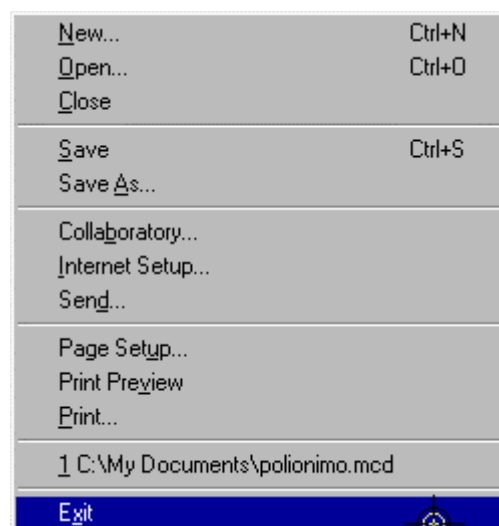
Στην κορυφή του παραθύρου κάτω από τον τίτλο βλέπετε τη μπάρα με τα γνωστά μενού 'File', 'Edit', 'View', 'Window', 'Help'. Αν έχετε προηγούμενη επαφή με τα Windows, θα αναγνωρίσετε τα μενού για τις βασικές λειτουργίες του προγράμματος όπως το σώσιμο, η εκτύπωση, η διόρθωση, ο έλεγχος των παραθύρων στην οθόνη κλπ. Επίσης παρατηρήστε τα ιδιαίτερα μενού του Mathcad:

- Insert
- Format
- Math
- Symbolics

Θα εξετάσουμε αυτά τα ιδιαίτερα μενού αργότερα. Τώρα μπορείτε να δοκιμάσετε να χρησιμοποιήσετε το ποντίκι σας για μια γρήγορη ματιά στο περιεχόμενο των μενού.

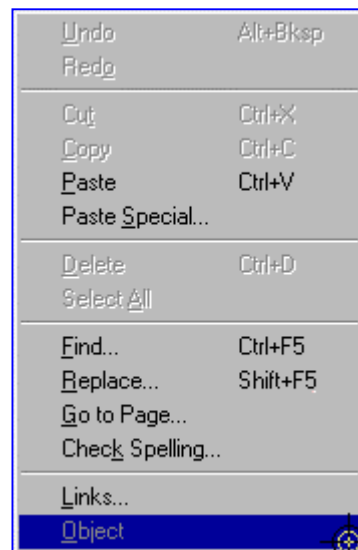
#### **File**

Στο File menu σας επιτρέπει να κάνετε βασική διαχείριση αρχείων με διεργασίες όπως η δημιουργία νέου, η αποθήκευση κειμένου του Mathcad ή το άνοιγμα, κλείσιμο ή σώσιμο προηγούμενης εργασίας. Άλλες εργασίες που μπορείτε να επιλέξετε από το μενού File περιλαμβάνουν την πρόσβαση στο Internet και στις βιβλιοθήκες του Mathcad, η την αποστολή κειμένων Mathcad με email. Μπορείτε επίσης να ρυθμίσετε τις σελίδες σας για εκτύπωση και τελικά να τις εκτυπώσετε, ή να δείτε πώς θα εμφανιζόταν στο χαρτί σε περίπτωση που τις τυπώνατε. Στο κατώτερο μέρος του μενού το Mathcad εμφανίζει μια λίστα με τα αρχεία που δουλεύατε πρόσφατα, και τα οποία μπορείτε να ανοίξετε με ένα κλικ.



## Edit

Το μενού Edit δίνει βασικές δυνατότητες επεξεργασίας κειμένου όπως το Κόψιμο δεδομένων από ένα αρχείο και η Επικόλληση του σε άλλο μέρος σε αυτό ή σε άλλο αρχείο, η διαγραφή συγκεκριμένων τμημάτων του αρχείου σας, ή η επιλογή όλου του κειμένου. Η επιλογή «Undo» υπάρχει στην κορυφή του μενού Edit σε περίπτωση που κάνετε κάποιο λάθος ή αλλάξετε γνώμη. Το «Undo» ακυρώνει την τελευταία πράξη σας (αν και ορισμένες πράξεις δεν μπορούν να αναιρεθούν, οπότε και η επιλογή θα είναι *μη διαθέσιμη*). Η «Επανάληψη» (Redo) ακυρώνει μια προηγούμενη ακύρωση. Οι επιλογές “Find”, “Replace”, “Go to page” υπάρχουν για να σας βοηθούν να μετακινήσετε σε μέρη του κειμένου σας όπου θέλετε να κάνετε αλλαγές. Το “Check Spelling” εκκινεί τον ενσωματωμένο ελεγκτή ορθογραφίας του Mathcad που περιλαμβάνει τεχνικούς μαθηματικούς όρους (στα Αγγλικά) που δεν περιλαμβάνονται σε άλλους ορθογράφους. Τα “Links” & “Object” χρησιμοποιούνται κατά την εργασία με δεδομένα από άλλα κείμενα Mathcad ή για διασύνδεση με άλλες εφαρμογές και ανταλλαγή δεδομένων.



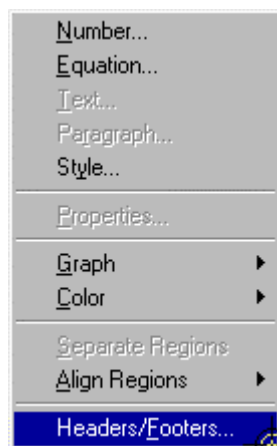
## View

Το μενού View σας δίνει έλεγχο της εμφάνισης της οθόνης του Mathcad. Τα “Toolbar”, “Format Bar” και “Math Palette” αναβοσβήνουν αυτά τα μέρη του προγράμματος κάθε φορά που τα επιλέγετε επιτρέποντας σας να έχετε μια πιο «καθαρή» οθόνη ανάλογα με τις ανάγκες σας. Το “Regions” δείχνει τις περιοχές μαθηματικών και κειμένου του εγγράφου σας. Το “Zoom” ελέγχει το επίπεδο μεγέθυνσης της εικόνας που εμφανίζεται στο παράθυρο. Το “Refresh” ξαναζωγραφίζει την εικόνα μετά από εκτεταμένη διόρθωση. Τα “Animate”, “Playback” χρησιμοποιούνται για την δημιουργία κινούμενων γραφημάτων για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σας.



## Insert

Το μενού Insert σας επιτρέπει να εισάγετε γραφικές παραστάσεις (Graphs), πίνακες (Matrices), μαθηματικές συναρτήσεις (Functions), μονάδες (Units - κιλά, χιλιόμετρα κλπ.) στο κείμενό σας. Μπορείτε επίσης να δημιουργήσετε «Μαθηματικές περιοχές (Math Regions)» ή «Περιοχές κειμένου (Text Regions)» στο κείμενό σας, η “Page Break” για την εκκίνηση νέας σελίδας στην περιοχή εργασίας σας. Αυτό το μενού περιέχει ένα υπομενού που σας επιτρέπει να εισάγετε γραφήματα και δύο υπομενού για εισαγωγή συνδέσμων (hyperlinks) στα κείμενα Mathcad.

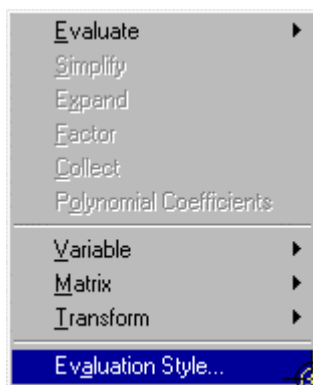
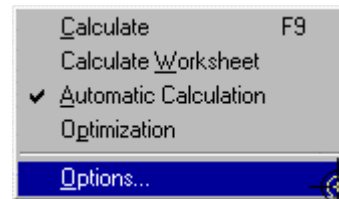


## Format

Το μενού Format σας διευκολύνει να διαμορφώσετε τον τρόπο με τον οποίο θα εμφανίζεται η εργασία σας στην οθόνη ή στον εκτυπωτή. Η διαμόρφωση (Formatting) έχει βελτιωθεί ιδιαίτερα στην έκδοση 7. Μπορείτε να αλλάξετε την εμφάνιση των αριθμών (numbers), εξισώσεων (equations), κειμένου (text), παραγράφων (paragraphs), στυλ (style) και γραφημάτων. Μπορείτε να καθορίσετε χρώματα για να βελτιώσετε την εμφάνιση και την καθαρότητα των κειμένων σας. Με την επιλογή «Ιδιότητες (Properties)» έχετε τη δυνατότητα να τονίσετε με χρώμα ή να θέσετε κάποιο πλαίσιο στις εξισώσεις ή στο κείμενο

### Math

Το μενού Math σας δίνει έλεγχο πάνω στον τρόπο με τον οποίο το Mathcad κάνει υπολογισμούς. Η προκαθορισμένη επιλογή είναι ο αυτόματος υπολογισμός (Automatic Calculation) που παράγει τους περίφημους 'ζωντανούς' υπολογισμούς του Mathcad. Έτσι παίρνετε αποτελέσματα αμέσως χωρίς να πρέπει να πείτε στο πρόγραμμα να υπολογίσει ή να ανησυχείτε για το πώς και πότε γίνονται οι υπολογισμοί. Τα "Calculate" και "Calculate Worksheet" σας επιτρέπουν να απενεργοποιήσετε τον αυτόματο υπολογισμό και ώστε το πρόγραμμα να σας περιμένει για να κάνει τους υπολογισμούς χειροκίνητα. Κατά καιρούς μπορεί να θέλετε τη συνεργασία του αριθμητικού και του συμβολικού επεξεργαστή για καλύτερα αποτελέσματα. Το 'Optimization' λέει στο Mathcad να εργαστεί με τους δύο επεξεργαστές σε παράλληλη λειτουργία ώστε να παράγει αποτελέσματα βελτιστοποιημένα οπτικά και για ευκολότερους υπολογισμούς. Οι επιλογές (options) σας δίνουν έλεγχο πάνω στο σύστημα μονάδων που θα χρησιμοποιηθεί, τις διαστάσεις, μερικές εσωτερικές ανοχές καθώς και παραμέτρους εκτύπωσης.

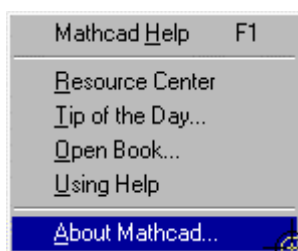
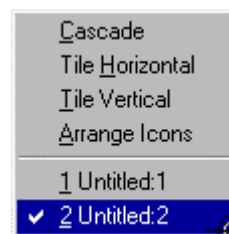


### Symbolics

Το μενού Symbolics σας επιτρέπει να κάνετε υπολογισμούς που καταλήγουν σε απαντήσεις που αποτελούν μαθηματικές παραστάσεις αντί για απλούς αριθμούς, ή σε συγκεκριμένες λύσεις αντί για αριθμητικές προσεγγίσεις. Υπάρχουν υπομενού για συμβολικούς υπολογισμούς μεταβλητής (variable), πίνακα (matrix) και μεταβολών (transforms)

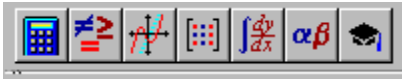
### Window

Το μενού Window σας δίνει τη δυνατότητα να διαρρυθμίσετε τα παράθυρα και τα εικονίδια στην οθόνη σας, και το πιο σημαντικό, δείχνει τα ανοιχτά κείμενα Mathcad, επιτρέποντας σας να μετακινηθείτε γρήγορα και εύκολα από το ένα στο άλλο.



### Help

Πέρα από το να σας δίνει πρόσβαση στην άμεση βοήθεια του Mathcad, το μενού Help σας δίνει όλες τις συντομεύσεις του πληκτρολογίου και πρόσβαση στα Quicksheets και άλλες χρήσιμες λειτουργίες που υπάρχουν στο νέο κέντρο πληροφοριών (Resource Center).



Σε ένα σημείο στην οθόνη βλέπετε μια παλέτα με μία ομάδα επτά εικονιδίων με μαθηματικά σύμβολα. Αυτά τα εικονίδια χρησιμοποιούνται για να καλέσετε (με ένα κλικ) παλέτες που εμφανίζουν μαθηματικούς τελεστές, σύμβολα, ελληνικά γράμματα και να τα προσθέσετε εύκολα στην εργασία σας. Μπορείτε να σύρετε αυτές τις παλέτες στην οθόνη σας με το ποντίκι ώστε να είναι πλησιέστερα όταν τις χρειάζεστε, ή να τις μετατρέψετε σε μπάρες εργαλείων. Επίσης υπάρχουν συνδυασμοί πλήκτρων για πολλά από αυτά τα σύμβολα για τους χρήστες που προτιμούν να δουλεύουν με το πληκτρολόγιο.



Η παλέτα «**Arithmetic's**» (αριθμητική) (Εικ.2) περιέχει τα ψηφία 0 έως 9. Παρόλο που αυτά υπάρχουν στο πληκτρολόγιο το Mathcad σας δίνει ένα άλλο τρόπο να τα εισάγετε στις εξισώσεις σας (με ένα κλικ στην παλέτα). Επίσης σε αυτή την παλέτα υπάρχουν οι πιο κοινές μαθηματικές σταθερές, παρενθέσεις, μερικές βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι βασικές αριθμητικές πράξεις, μερικές δυνάμεις, ρίζες και μερικά άλλα συχνά χρησιμοποιούμενα σύμβολα, που μπορείτε εύκολα να εισάγετε στην εργασία σας με ένα κλικ.



Η παλέτα «**Evaluation and Boolean**» (υπολογισμών και λογικών πράξεων) (Εικ.3) περιλαμβάνει τους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους μαθηματικούς τελεστές, όπως αυτόν που λει στο Mathcad να εκτελέσει ένα συμβολικό υπολογισμό (το δεξί βελάκι). Αυτή η παλέτα επίσης περιλαμβάνει σύμβολα για την καταχώρηση τιμών και τη δημιουργία ανισώσεων, λογικών εκφράσεων και αρκετούς άλλους τελεστές.



Η παλέτα «**Graph**» (γραφική παράσταση) (Εικ.4) σας επιτρέπει να δημιουργήσετε γραφικές παραστάσεις από τα δεδομένα σας με ένα κλικ. Με τις γραφικές δυνατότητες του Mathcad μπορούν να παρασταθούν και οι πιο πολύπλοκες γραφικές παραστάσεις. Επιπλέον οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να εκτυπωθούν καθαρά και παραστατικά στο χαρτί. Για παράδειγμα μπορείτε να δημιουργήσετε άμεσα τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ορίζοντας τον τύπο της (πχ.  $x^2$ ) και κάνοντας κλικ στο πάνω αριστερό εικονίδιο της παλέτας .



Η παλέτα «**Vectors and Matrices**» (Εικ.5) σας δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσετε και να χρησιμοποιήσετε διανύσματα και πίνακες .



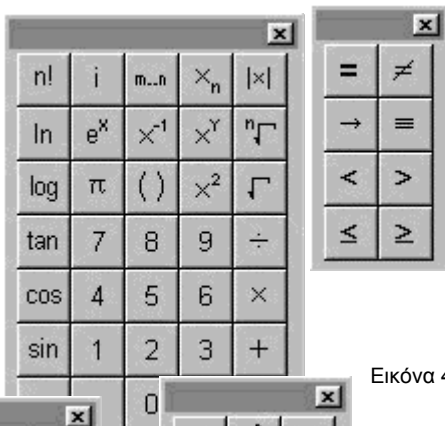
Η παλέτα «**Calculus**» (Εικ.6) σας δίνει σύμβολα που θα χρησιμοποιήσετε για υπολογιστικά προβλήματα όπως όρια, ολοκληρώματα, παράγωγοι και αθροίσματα.



Η παλέτα «**Greek Symbol**» σας βοηθάει να δημιουργήσετε εξισώσεις που μοιάζουν ακριβώς όπως και στα βιβλία. Σας επιτρέπει να εισάγετε εύκολα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου μέσα στις μαθηματικές εκφράσεις σας χωρίς να χρειάζεται να θυμάστε συνδυασμούς πλήκτρων.



Η παλέτα «**Symbolic Keyword**» (Εικ.7) σας διαθέτει έναν αριθμό τελεστών που χρησιμοποιούνται στα συμβολικά μαθηματικά. Αν κάνετε κλικ στο "Modifiers" παίρνετε μια δευτερεύουσα παλέτα.



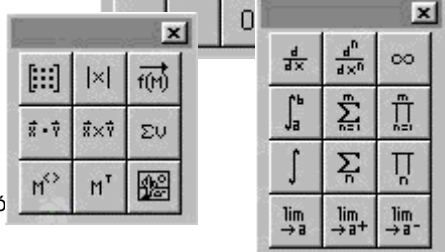
Εικόνα 3



Εικόνα 4

$\bullet \rightarrow$	$\bullet\bullet \rightarrow$	Modifiers
float	complex	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
$m^T \rightarrow$	$m^{-1} \rightarrow$	$ m  \rightarrow$

Εικόνα 7



Εικόνα 6





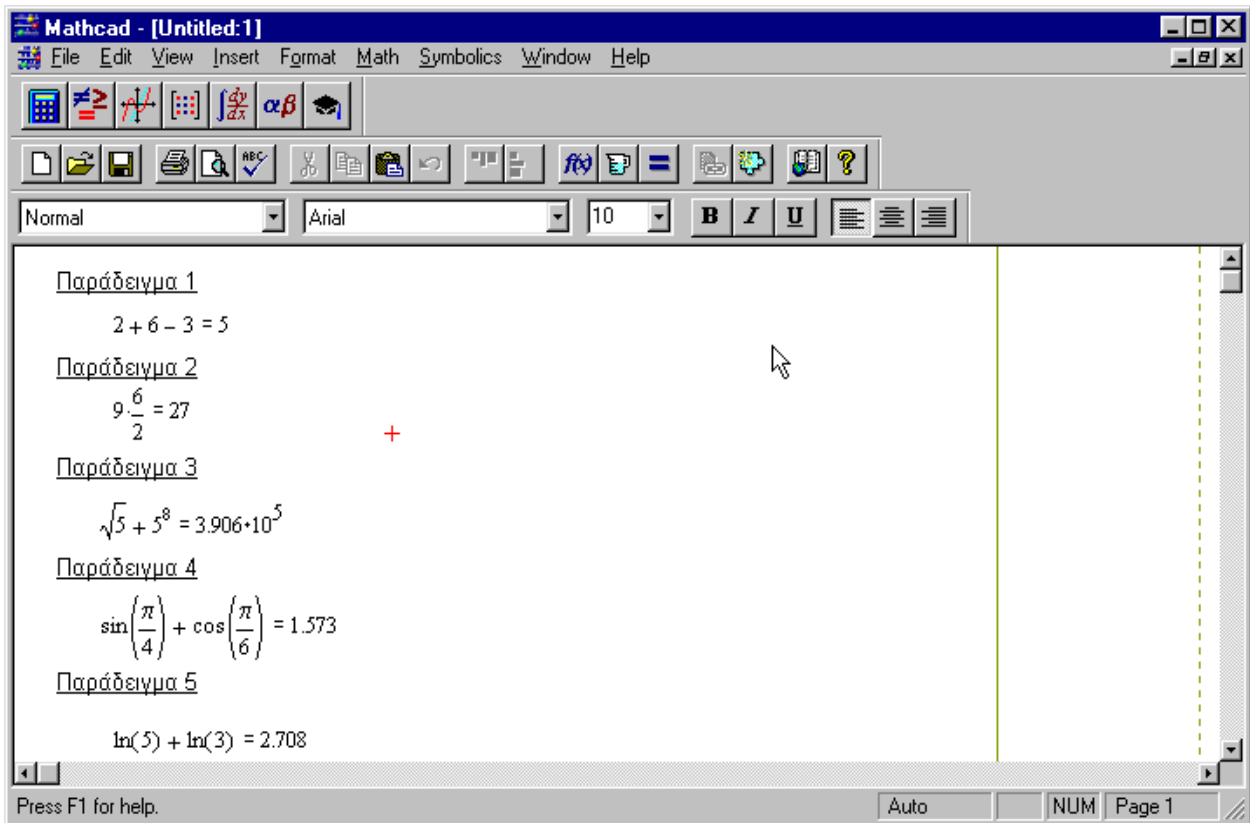
Κάτω από τα μενού του Mathcad υπάρχουν δύο μπάρες εργαλείων που μπορείτε να ενεργοποιήσετε ή να απενεργοποιήσετε από το μενού View. Η μπάρα περιέχει τα γνωστά εργαλεία των Windows τα οποία ανοίγουν, σώζουν, τυπώνουν ή επεξεργάζονται ένα αρχείο του Mathcad, όπως επίσης και ειδικά εργαλεία του προγράμματος που εισάγουν μαθηματικές συναρτήσεις, μονάδες, ή χρησιμοποιούν το Resource Center/ MathConnex. Υπάρχουν εργαλεία για τη στοίχιση περιοχών του κειμένου και για τη βελτίωση της απεικόνισης της εργασίας σας, εργαλεία για την εισαγωγή μονάδων όπως μίλια, χιλιόμετρα, κιλά, βολτ κλπ στο κείμενο, εργαλεία για μαθηματικές συναρτήσεις από την μεγάλη βιβλιοθήκη του Mathcad που μπορείτε να εισάγετε. Το εικονίδιο « $=$ » απεικονίζει ένα εργαλείο το οποίο λέει στο Mathcad να ότι έχετε τελειώσει με την εισαγωγή την μαθηματικής έκφρασης και είστε έτοιμοι για τον υπολογισμό του αποτελέσματος. Αυτό μπορείτε να το επιτύχετε και με το σημείο ίσον « $=$ ».

Η «Format Bar» περιλαμβάνει εργαλεία για τον έλεγχο της γραμματοσειράς, του μεγέθους των γραμμάτων και της αριστερής/ δεξιάς στοίχισης, όπως και άλλα στοιχεία για τον έλεγχο της εμφάνισης του κειμένου σας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε διαφορετική μορφοποίηση σε διαφορετικά μέρη του κειμένου σας μέσα σε μία ενιαία περιοχή κειμένου. Για παράδειγμα, φτιάχνοντας μέρος του κειμένου σας σε ένα συγκεκριμένο μέγεθος ή χρώμα χρησιμοποιώντας αυτά τα εργαλεία και το μενού Format. Αυτό σας επιτρέπει να επιλέξετε μέρη του κειμένου σας και να ετοιμάσετε ευπαρουσίαστα έγγραφα και εργασίες.

## Εφαρμογές και παραδείγματα

Κρίνεται σκόπιμο και πρέπει να πούμε στο σημείο αυτό ότι για τους αρχάριους χρήστες είναι προτιμότερο και πιο εύκολο η χρήση του Mathcad να γίνεται μέσω της αριθμητικής παλέτας, η οποία περιέχει πολλά από τα πιο γνωστά μαθηματικά σύμβολα.

### 1. Πράξεις με αριθμούς



#### Παράδειγμα 1

- Πληκτρολογήστε 2+6-3
- Πατώντας το = το Mathcad θα υπολογίσει αυτόματα αυτή την αριθμητική πράξη.

#### Παράδειγμα 2

- Πληκτρολογήστε 9\*6/2
- Πατήστε space
- Μόλις πατήσετε = το αποτέλεσμα θα εμφανιστεί στην οθόνη σας.

Παρατηρήστε στην οθόνη σας καθώς εισάγετε τα δεδομένα τις δυο μπλε γραμμές. Οι γραμμές αυτές σας δείχνουν το μέρος στο οποίο εισάγονται τα δεδομένα. Έτσι κάθε φορά που εισάγετε κάποιο κλάσμα, κάποια ρίζα ή δύναμη είναι αναγκαίο μετά την πληκτρολόγηση των στοιχείων στον παρανομαστή, στην ρίζα ή στην δύναμη, να πατήσετε το space για να δώσετε εντολή στο πρόγραμμα ότι έχετε τελειώσει με την εισαγωγή δεδομένων στο παρανομαστή, στη ρίζα ή στη δύναμη .

### Παράδειγμα 3

- Πληκτρολογήστε  $\sqrt{5}$
  - Πατήστε space
  - Έπειτα  $+5^8$
  - Space και μετά =
- (Υποσημείωση: Η ρίζα στο Mathcad εισάγεται με το πλήκτρο  $\sqrt{\quad}$  και η δύναμη με Ctrl και ^.)

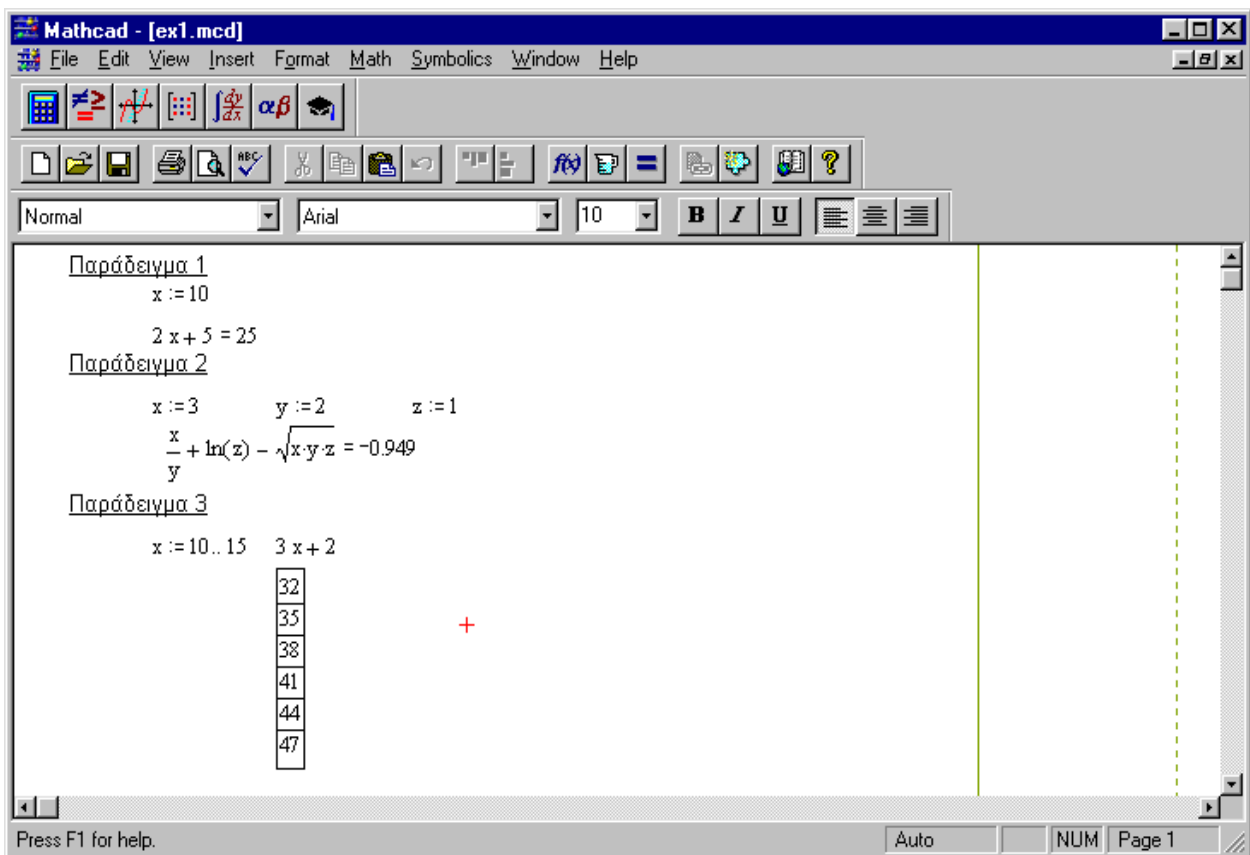
### Παράδειγμα 4

- Πληκτρολογήστε  $\sin(\pi/4)+\cos(\pi/6)=$
- (Για να ανοίξετε παρένθεση πατήστε ταυτόχρονα Ctrl και (, για να την κλείσετε πατήστε ταυτόχρονα Ctrl και ), και για να εισάγετε τον αριθμό π πατήστε ταυτόχρονα Ctrl και Π).

### Παράδειγμα 5

- Πληκτρολογήστε  $\ln(3)+\ln(5)=$

## 2. Μεταβλητές



### Παράδειγμα 1

- Πληκτρολογήστε  $x:=10$
- Μετακινήστε τον δρομέα του ποντικιού πιο κάτω από το x, κάντε κλικ στο σημείο που θέλετε να εισάγετε δεδομένα και
- Πληκτρολογήστε  $2x+5=$

(Το σύμβολο := εισάγεται πατώντας ταυτόχρονα Shift και :).

Δοκιμάστε και αλλάξτε την τιμή του x. Θα δείτε ότι και το αποτέλεσμα επαναυπολογίστηκε ταυτόχρονα.

## Παράδειγμα 2

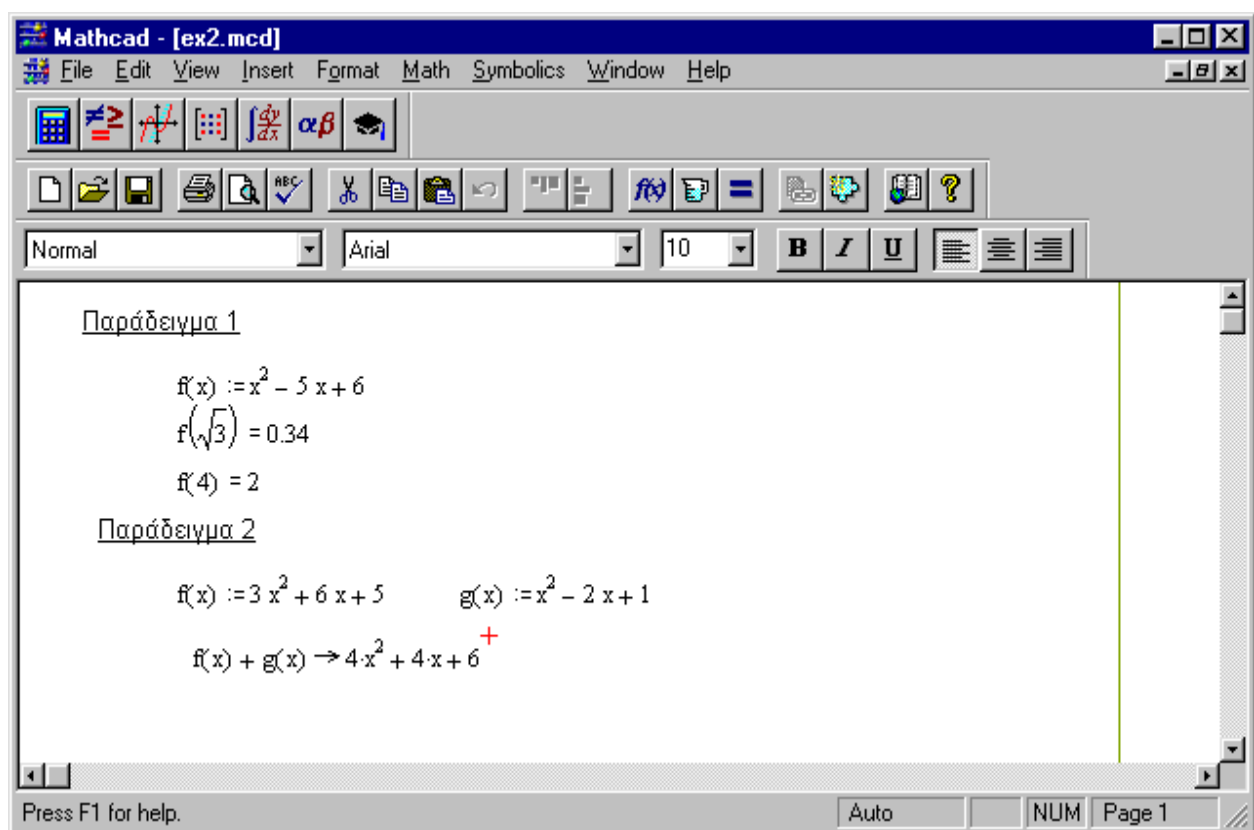
- Πληκτρολογήστε  $x:=3$
- Μεταφέρετε το δρομέα του ποντικιού λίγο πιο δίπλα και κάντε κλικ στο σημείο που θέλετε να εισάγετε δεδομένα
- Γράψτε  $y:=2$  και λίγο πιο πέρα  $z:=1$
- Κάτω από τις ορισμένες μεταβλητές πληκτρολογήστε  $x/y+\ln(z)-\sqrt{xyz} =$

## Παράδειγμα 3

- Πληκτρολογήστε  $x:=10...15$
- Έπειτα γράψτε, πιο κάτω από το  $x$ ,  $3x+2$
- Πατώντας = το Mathcad θα σας δείξει στην οθόνη σας ένα πίνακα με 6 αριθμούς οι οποίοι αντιστοιχούν στις τιμές που παίρνει το  $x$ .

(Για να εισάγετε τις ... που δηλώνουν σειρά, πιάστε το πλήκτρο ; )

## 3. Συναρτήσεις



The screenshot shows the Mathcad software window titled "Mathcad - [ex2.mcd]". The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Format, Math, Symbolics, Window, Help), a toolbar with various mathematical symbols and functions, and a text area. The text area contains the following content:

Παράδειγμα 1

$$f(x) := x^2 - 5x + 6$$
$$f(\sqrt{3}) = 0.34$$
$$f(4) = 2$$

Παράδειγμα 2

$$f(x) := 3x^2 + 6x + 5 \quad g(x) := x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) + g(x) \rightarrow 4x^2 + 4x + 6$$

At the bottom of the window, there is a status bar with the text "Press F1 for help." and buttons for "Auto", "NUM", and "Page 1".

## Παράδειγμα 1

- Πληκτρολογήστε  $f(x):=x^2-5x+6$
- Έπειτα κάτω από την ορισμένη συνάρτηση γράψτε  $f(\sqrt{3}) =$  και
- Λίγο πιο κάτω γράψτε  $f(4)=$

Το Mathcad υπολογίζει την συνάρτηση  $f$  για τις διάφορες τιμές του  $x$ .

## Παράδειγμα 2

- Πληκτρολογήστε  $f(x)=3x^2+6x+5$  και λίγο πιο δίπλα  $g(x)=x^2-2x+1$
- Κάτω από τις δυο συναρτήσεις γράψτε  $f(x)+g(x) \rightarrow$

Το Mathcad θα βρει το άθροισμα των δυο συναρτήσεων .  
(Το σύμβολο  $\rightarrow$  εισάγεται πατώντας ταυτόχρονα Ctrl και  $\rightarrow$ .)

Mathcad - [ex4.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$B := \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 25 & 31 & 9 & 12 \\ 15 & 26 & 15 & 14 \\ 25 & 31 & 18 & 15 \\ 25 & 38 & 12 & 13 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 & 0.6 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.633 & 0.433 & -0.567 & -0.167 \\ 0.233 & 0.633 & -0.367 & -0.167 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 30$

Press F1 for help. Auto NUM Page 1

## 4. Πίνακες και Ορίζουσες

- Πληκτρολογήστε  $A :=$

Για να εισάγετε ένα πίνακα πρέπει να επιλέξετε Insert και μετά Matrix ή να πιάσετε ταυτόχρονα Ctrl και M ή από την παλέτα «Vector and Matrix Palette» να πιάσετε το πλήκτρο



Insert Matrix

Rows: 4 OK

Columns: 4 Insert

Delete

Cancel

Κάνοντας μια από τις παραπάνω διαδικασίες θα οδηγηθείτε στη διπλανή εικόνα στην οποία θα κληθείτε να διαλέξετε το μέγεθος του πίνακα.

- Καλέστε ένα 4x4 πίνακα και γράψτε τα στοιχεία όπως φαίνονται στο παράδειγμα
- Κάντε το ίδιο και για τον πίνακα B του παραδείγματος
- Για να κάνετε πολλαπλασιασμό, πρόσθεση και αφαίρεση αυτών των δυο πινάκων απλώς γράψτε, πιο κάτω από το σημείο που έχουν οριστεί οι πίνακες,  $A \cdot B =$  πιο δίπλα  $A + B =$  και λίγο πιο

πέρα  $A \cdot B =$ , τα αποτελέσματα θα εμφανιστούν στη οθόνη σας όπως φαίνονται στο παράδειγμα μας.

- Για να υπολογίσετε τον αντίστροφο του πίνακα A αρκεί να γράψετε  $A^{-1} =$  ή μπορείτε να επιλέξετε τον πίνακα A και πατώντας space έτσι ώστε να περιέχετε ολόκληρος ανάμεσα στις μπλε γραμμές να ακολουθήσετε την διαδρομή Symbolic/ Matrix/ Invert.

- Για να υπολογίσετε τον ανάστροφο πίνακα του A αρκεί να γράψετε  $A^T =$  ή επιλέγοντας τον πίνακα A και πατώντας space να ακολουθήσετε την διαδρομή Symbolic/ Matrix/ Transpose .

(Το σύμβολο του ανάστροφου πίνακα εισάγεται πιέζοντας ταυτόχρονα τα πλήκτρα Ctrl και !).

- Για να υπολογίσετε την ορίζουσα ενός πίνακα πληκτρολογήστε  $|A|$  ή επιλέγοντας τον πίνακα A και πατώντας space ώστε να επιλέγει ολόκληρος να ακολουθήσετε την διαδρομή Symbolic/ Matrix/ Determinant.

(Το σύμβολο της ορίζουσας εισάγεται με Ctrl και \).

## 5. Όρια

Mathcad - [ex4.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

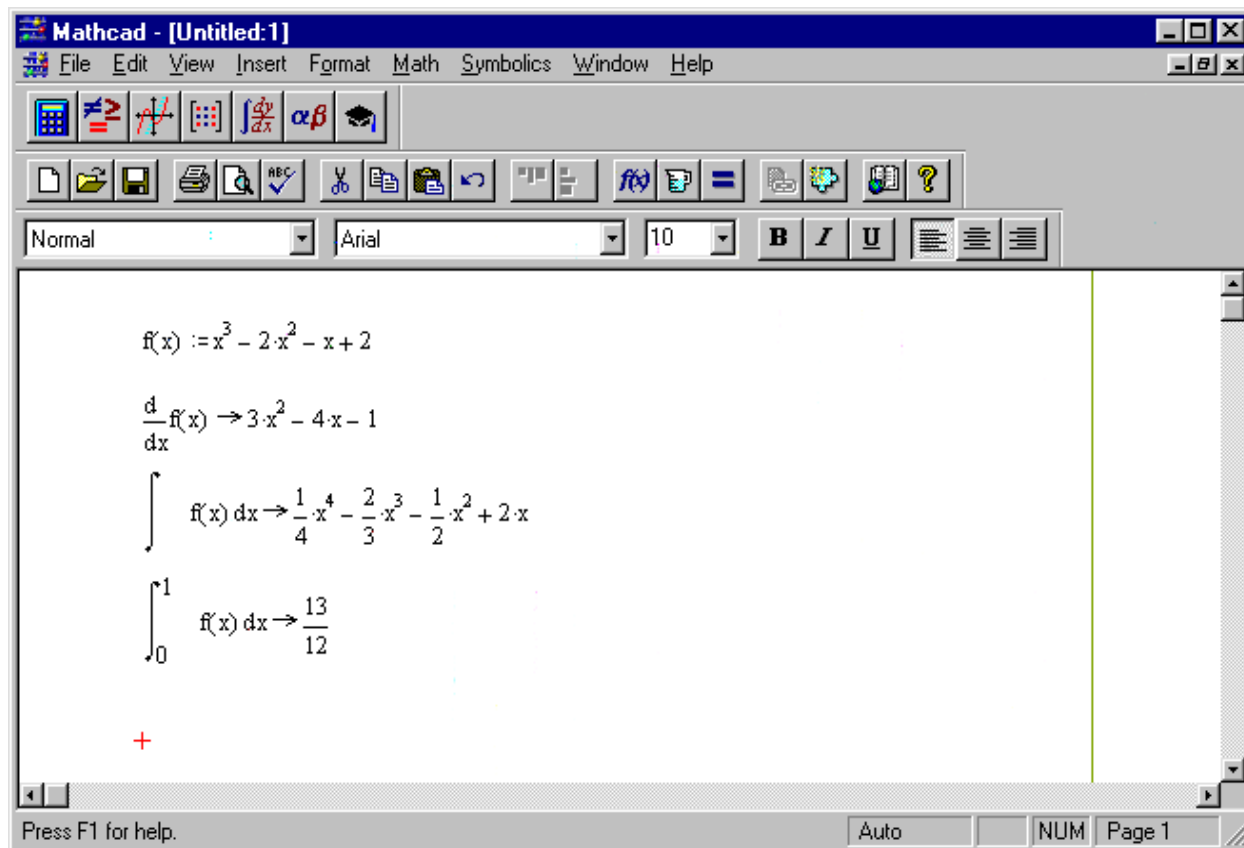
$$f(x) := \frac{3x^2 + 5x + 6}{x^3 + 5x} \quad g(x) := \frac{3x^3 + 6x + 5}{x^3 + 5x}$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \frac{14}{9} \quad \lim_{x \rightarrow 4} g(x) \rightarrow \frac{221}{84}$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \rightarrow 3$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) \rightarrow 3 \quad +$$

Press F1 for help. Auto NUM Page 1

- Ορίσετε τις συναρτήσεις  $f(x) := 3x^2 + 5x + 6 / x^3 + 5x$  και λίγο πιο δίπλα την  $g(x) := 3x^3 + 6x + 5 / x^3 + 5x$
- Εισάγετε το όριο της f όταν το x τείνει στο 2 και πατήστε  $\rightarrow$
- Δίπλα γράψτε το όριο της g όταν το x τείνει στο 4 και πατήστε  $\rightarrow$
- Κάντε το ίδιο και για το όριο της f όταν το x τείνει στο  $+\infty$  και για το όριο της g όταν το x τείνει στο  $-\infty$
- Τέλος, κάνοντας τα ίδια βήματα μπορείτε να βρείτε και το όριο της f+g

Για να εισάγετε το όριο πιέστε ταυτόχρονα τα πλήκτρα Ctrl και L. Για να ορίσετε το όριο τοποθετήστε το δρομέα του ποντικιού στα μαύρα τετράγωνα και γράψτε τους αντίστοιχους αριθμούς όπως φαίνονται στο παράδειγμα μας. Πατώντας  $\rightarrow$  θα δείτε το όριο να υπολογίζεται αυτόματα.

## 6. Παράγωγοι και Ολοκληρώματα



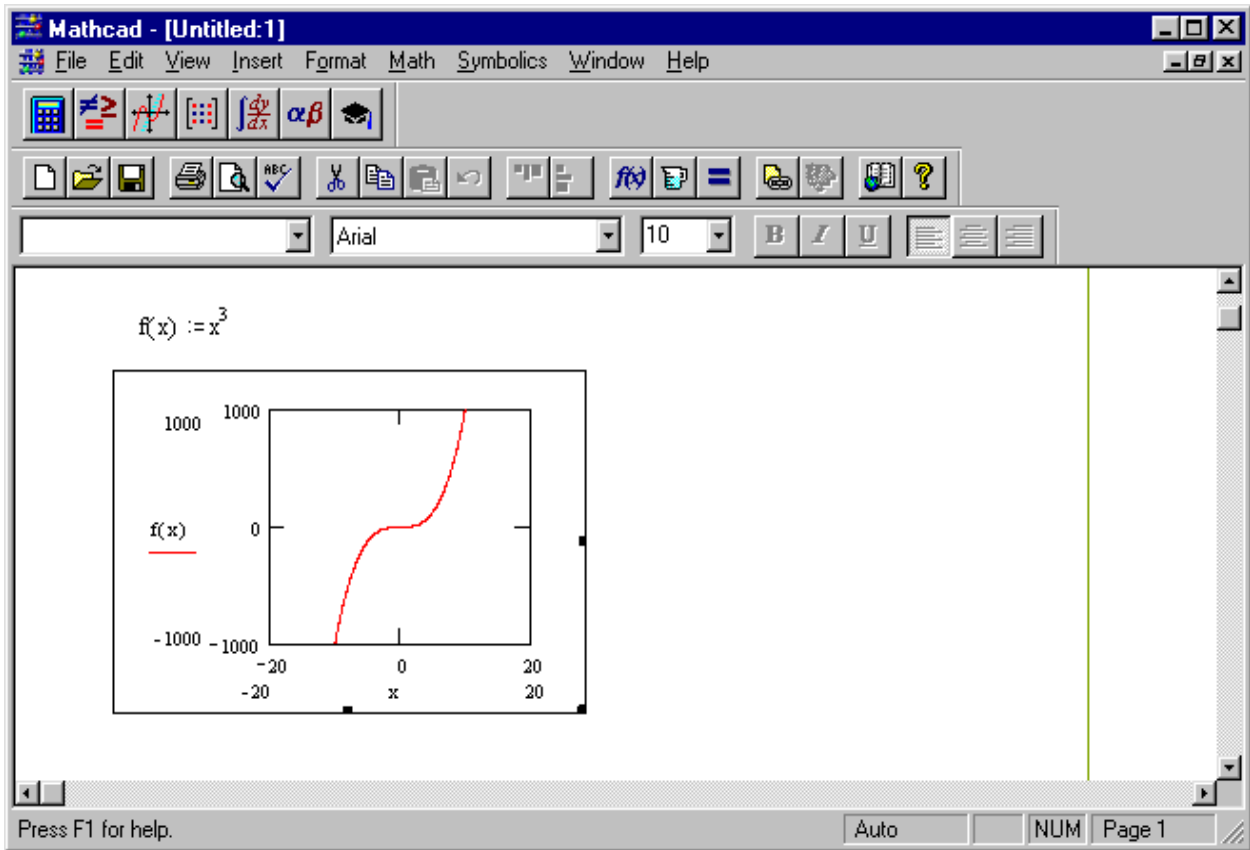
- Πληκτρολογήστε τη συνάρτηση  $f(x) := x^3 - 2x^2 - x + 2$
- Για να βρείτε την παράγωγο της  $f$  γράψτε  $df(x)/dx \rightarrow$

Το Mathcad αμέσως θα σας παρουσιάσει την παράγωγο της  $f$ .  
(Το σύμβολο  $d / dx$  εισάγεται πατώντας Shift και /).

- Για να βρείτε το ολοκλήρωμα της  $f$  γράψτε  $\int f(x)dx \rightarrow$   
(Το σύμβολο του ολοκληρώματος εισάγεται με Ctrl και I).

Επίσης αν θέλετε να υπολογίσετε ορισμένο ολοκλήρωμα για την  $f$  για παράδειγμα το  $\int_0^1 f(x)dx$  πιέστε Shift και 7 ορίστε τα όρια ολοκλήρωσης και πληκτρολογήστε  $\int_0^1 f(x)dx \rightarrow$

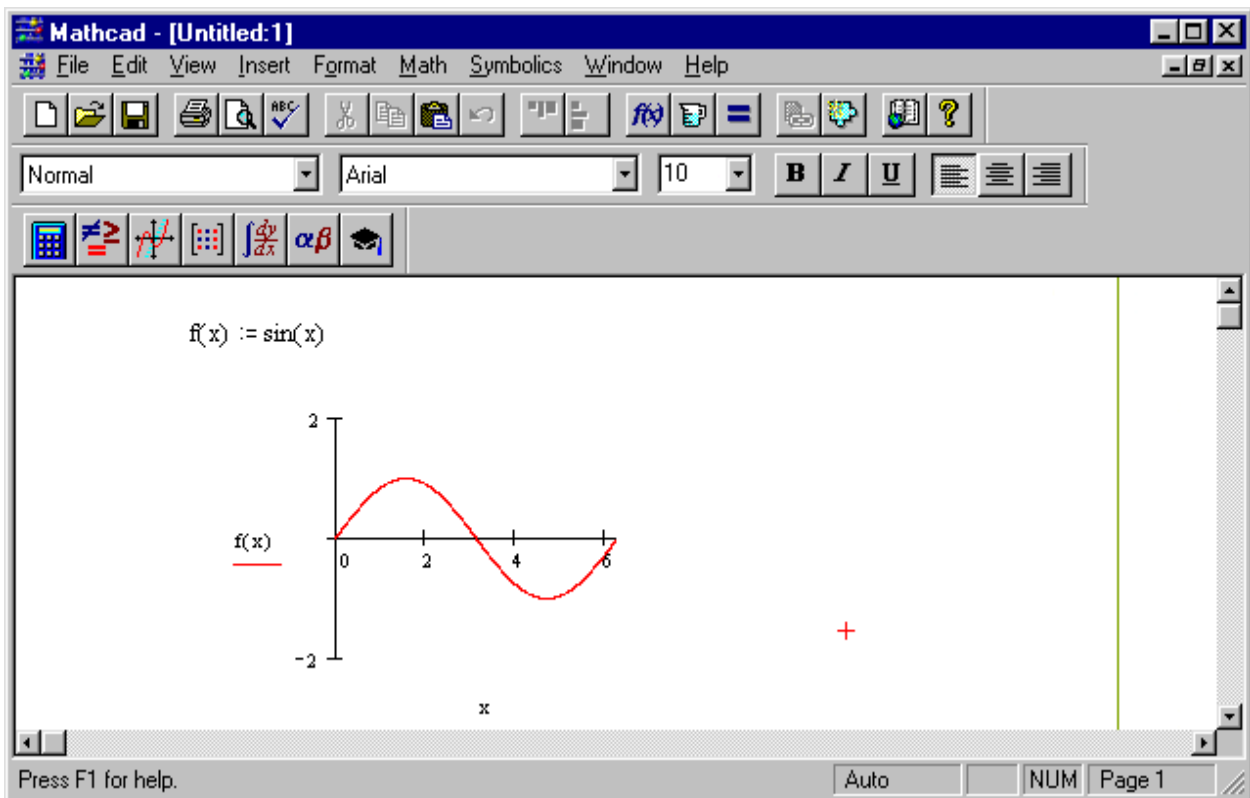
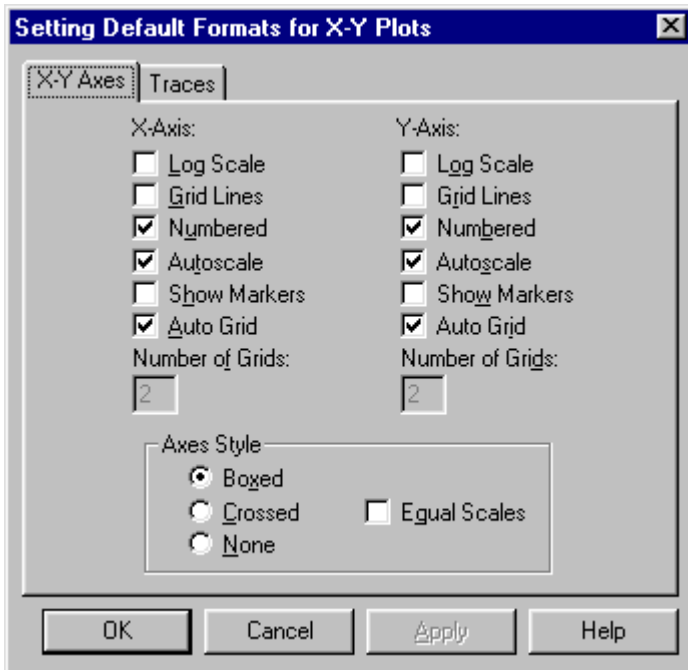
## 7. Γραφήματα



- Πληκτρολογείτε τη συνάρτηση  $f(x) := x^3$
- Για να εισάγετε γράφημα επιλέξτε Insert/ Graph/ X-Y Plot ώστε να εμφανίσετε την γραφική παράσταση σε καρτεσιανές συντεταγμένες x-y. Κάντε κλικ στα μαύρα τετράγωνα για να ορίσετε ποια μεταβλητή περιγράφει κάθε άξονα και στις τέσσερις άκρες του γραφήματος δηλώστε τα όρια του κάθε άξονα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.
- Κάνοντας έπειτα κλικ σε οποιοδήποτε σημείο εκτός γραφήματος θα εμφανιστεί στην οθόνη σας η γραφική παράσταση της δοσμένης συνάρτησης.

Για να μορφοποιήσετε την γραφικής σας παράσταση επιλέξτε τον τύπο της από το μενού Format/ Graph. Πχ. στην περίπτωση που επιλέξετε μορφοποίηση μιας απλής γραφικής παράστασης σε καρτεσιανούς άξονες x,y, Θα εμφανιστεί το ακόλουθο παράθυρο:





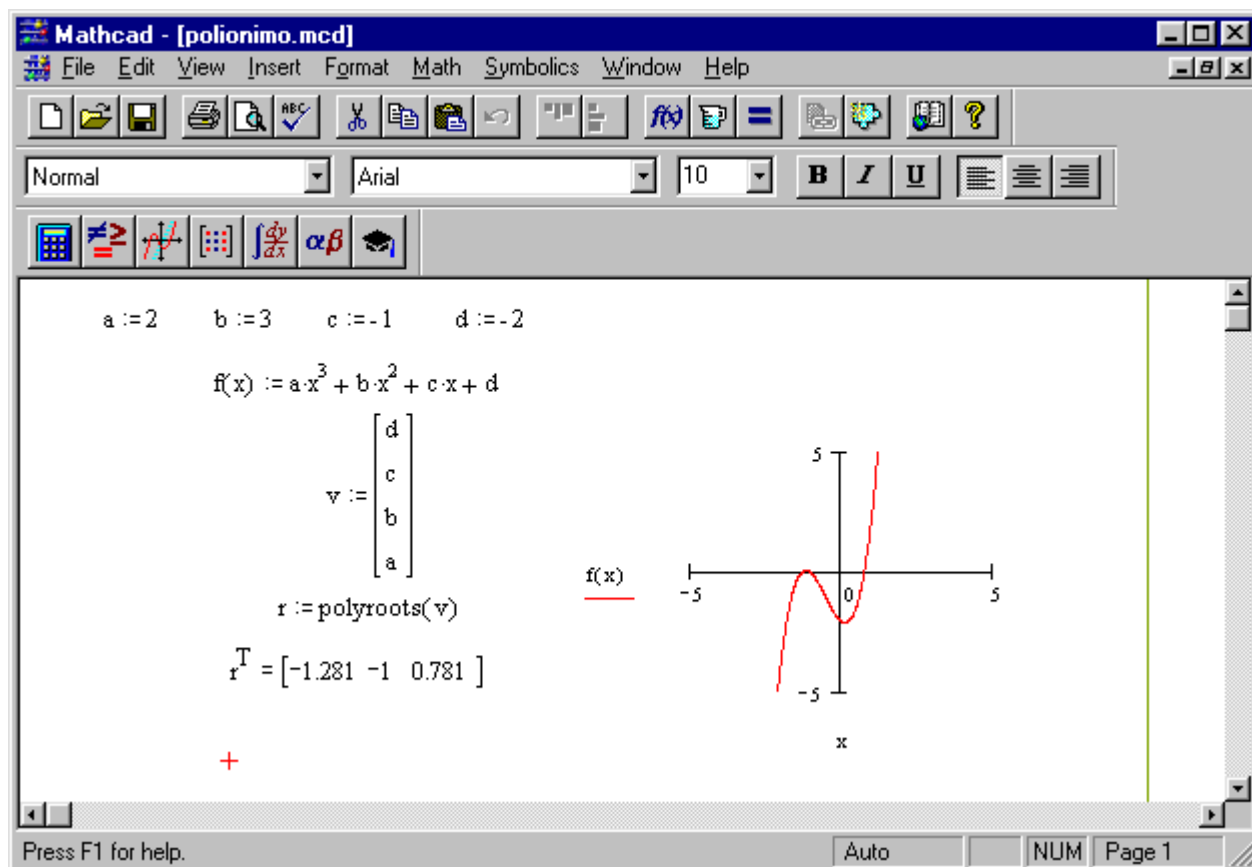
- Πληκτρολογήστε  $f(x) := \sin(x)$
- Εισάγετε το γράφημα της  $f(x)$  πιέζοντας ταυτόχρονα τα πλήκτρα Shift και 2
- Δώστε στα μαύρα τετράγωνα τις μεταβλητές και τα όρια για κάθε άξονα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε δώσει τιμές στους άξονες  $x$ ,  $y$ ,  $-2$  ως  $2$  και  $0$  ως  $2\pi$  αντίστοιχα. Επίσης έχει γίνει μορφοποίηση στο σχήμα από το μενού Format/ Graph στους άξονες κάνοντας κλικ στο Crossed και στο Equal Scales από το μενού Axes Style.

## 8. Έτοιμες συναρτήσεις από το Mathcad

Το Mathcad περιέχει πολλές έτοιμες συναρτήσεις για την επίλυση των προβλημάτων μας (Μαθηματικές, οικονομικές, στατιστικές κ.α.). Παρακάτω εξηγούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μερικές συναρτήσεις, τις οποίες θεωρήσαμε ως βασικές, μέσω του Mathcad.

### A) Ρίζες πολυωνύμων (Polyroots)



Δίνει τις ρίζες ενός πολυωνύμου.

- Πληκτρολογείτε τη συνάρτηση  $f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Πληκτρολογείτε  $v :=$  και εισάγετε ένα πίνακα  $4 \times 1$  του οποίου τα στοιχεία του να είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου
- Πάνω από τη συνάρτηση ορίσετε τις τιμές που θέλετε για τους συντελεστές π.χ.  $a := 2$ ,  $b := 3$ ,  $c := -1$ ,  $d := -2$
- Πληκτρολογείτε  $r :=$  και εισάγετε τη συνάρτηση polyroots ακολουθώντας την διαδρομή Insert/ Function
- Στο μαύρο τετραγωνάκι που εμφανίζεται ανάμεσα στην παρένθεση πιέστε το  $v$
- Τέλος εισάγοντας τον ανάστροφο πίνακα του  $r$  ( $r^T$ ) θα δείτε στην οθόνη σας τις ρίζες του πολυωνύμου.
- Η γραφική παράσταση του ανωτέρου πολυωνύμου φαίνεται παραπλευρώς των ριζών.

## B) Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα (Eigenvalues and Eigenvectors)

The screenshot shows the Mathcad interface with the following content:

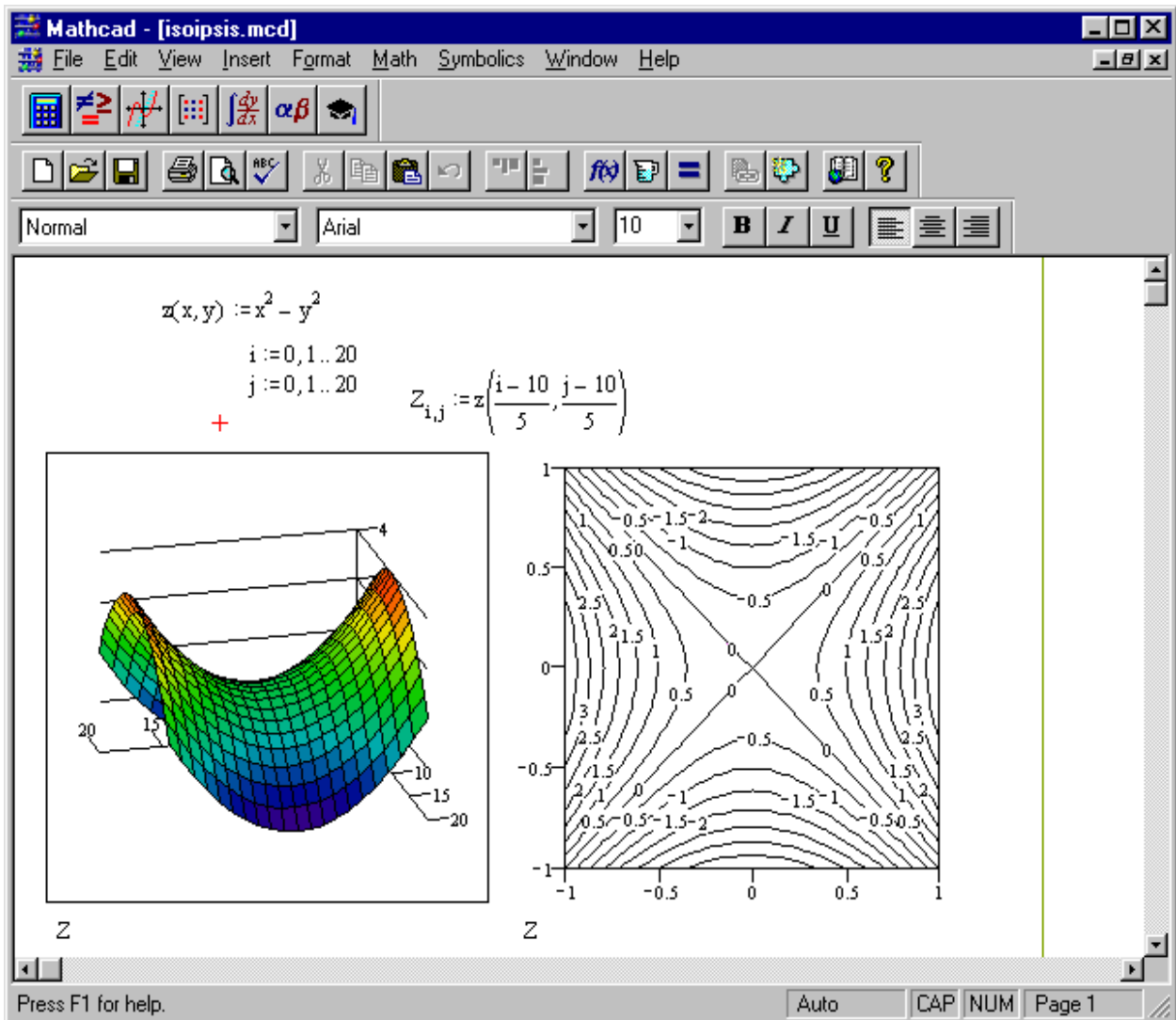
$$A := \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$
$$c := \text{eigenvals}(A) \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$v := \text{eigenvec}(A, c_0) \quad m := \text{eigenvec}(A, c_1) \quad n := \text{eigenvec}(A, c_2)$$
$$v = \begin{bmatrix} -0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix} \quad m = \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ -0.577 \end{bmatrix} \quad n = \begin{bmatrix} 0.302 \\ -0.302 \\ 0.905 \end{bmatrix}$$

Press F1 for help. Auto NUM Page 1

Δίνουν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα αντίστοιχα.

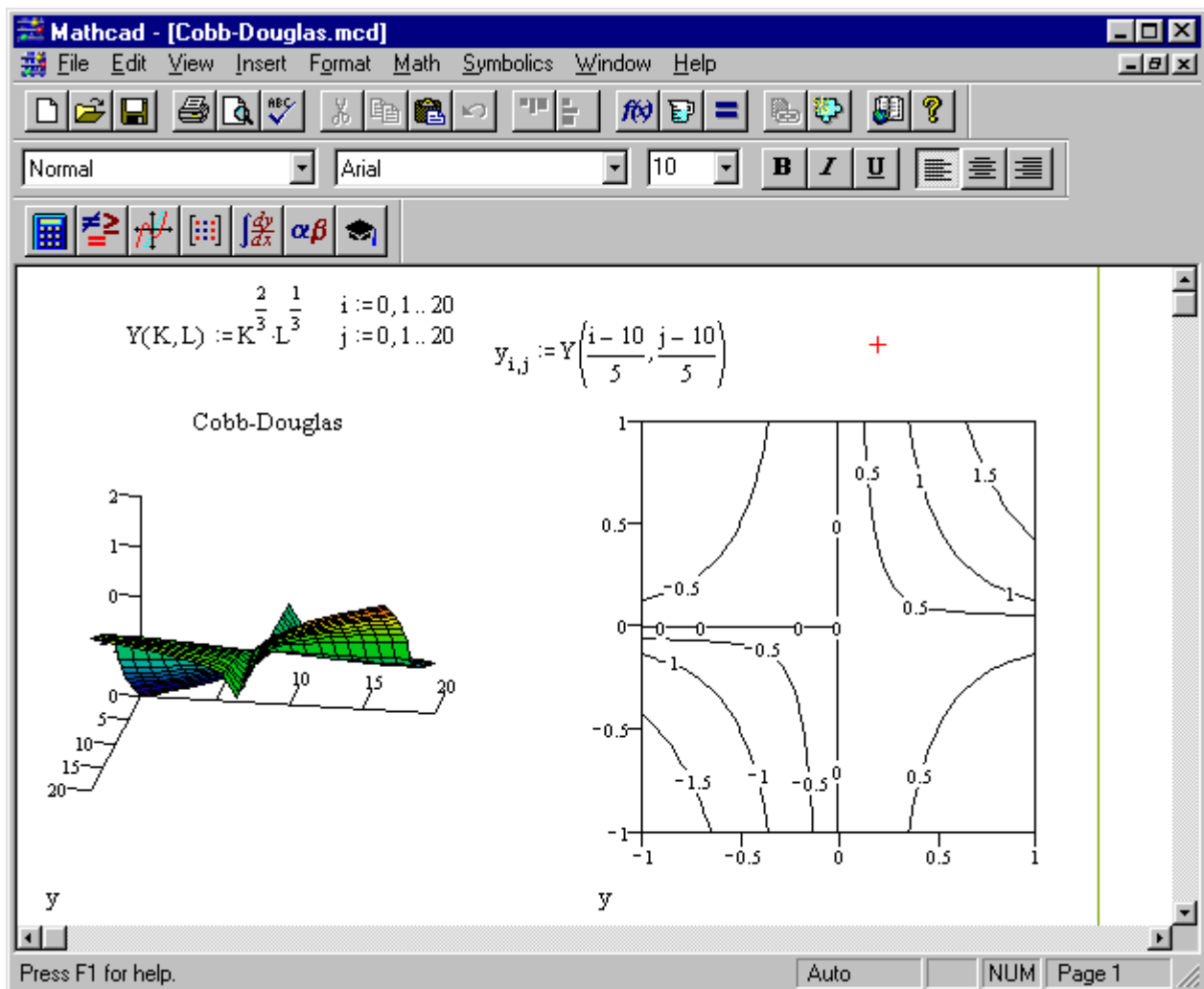
- Εισάγετε ένα πίνακα A 3x3 και γράψτε τα στοιχεία του όπως φαίνονται στο παράδειγμα.
- Πληκτρολογήστε c:= και καλέστε την συνάρτηση eigenvals ακολουθώντας την διαδρομή Insert/ Function
- Στο μαύρο τετράγωνο που εμφανίζεται πιάστε A
- Γράψτε, έπειτα, c= και το Mathcad θα σας δώσει τις ιδιοτιμές του πίνακα A
- Ονομάστε τα ιδιοδιανύσματα (v , m , n) πληκτρολογήστε μετά από κάθε ιδιοδιάνυσμα := και καλέστε την συνάρτηση eigenvec
- Στα μαύρα τετράγωνα που εμφανίζονται γράψτε στο πρώτο A και στο άλλο c<sub>0</sub> (το c<sub>0</sub> συμβολίζει την πρώτη ιδιοτιμή του πίνακα A), κάντε το ίδιο και για τα άλλα ιδιοδιανύσματα με τη διαφορά στη θέση του c<sub>0</sub> να δώσετε c<sub>1</sub> και c<sub>2</sub> αντίστοιχα
- Έπειτα πληκτρολογήστε v= , m= και n= και το Mathcad θα σας δώσει ένα ιδιοδιάνυσμα για κάθε ιδιοτιμή.

## 9. 3D-Graph



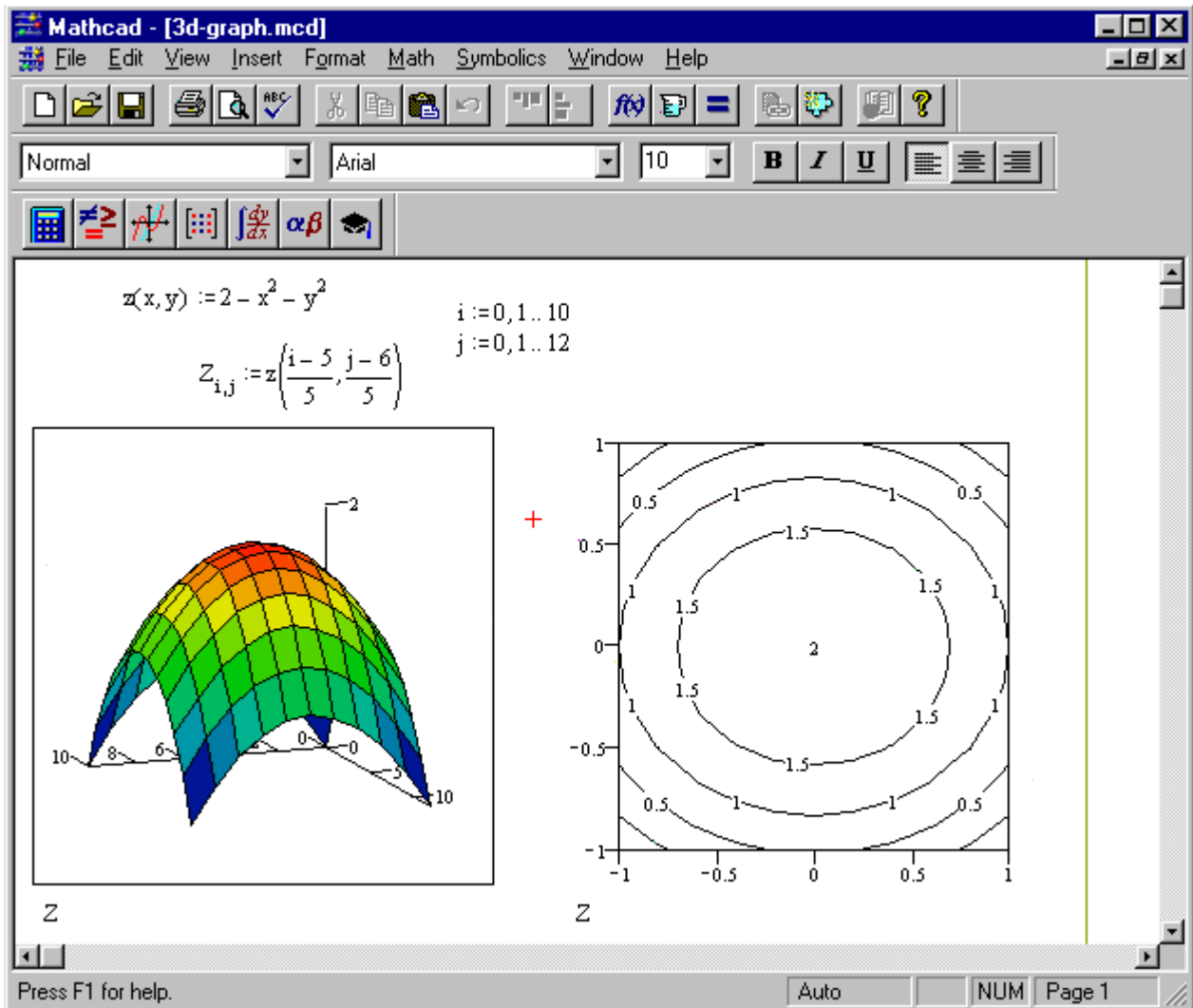
### Παράδειγμα 1

- Πληκτρολογείτε  $z(x,y) := x^2 - y^2$
- Δίνουμε ένα διάστημα στο οποίο θα παίρνουν τιμές τα  $x, y$  έστωσαν  $i := 0, 1, 2, \dots, 20$  και  $j := 0, 1, 2, \dots, 20$ . Θέλουμε να ορίσουμε και να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της  $z$  στο  $\left(\frac{i-10}{5}, \frac{j-10}{5}\right)$  δηλαδή θέλουμε το  $z$  να παίρνει τιμές από το  $-4$  έως το  $4$ .
- Ορίζουμε τον πίνακα  $Z_{i,j}$  σαν πίνακα τιμών της  $z$  πληκτρολογώντας  $Z_{i,j} := z\left(\frac{i-10}{5}, \frac{j-10}{5}\right)$
- Για να εισάγετε τους δείκτες  $i$  και  $j$  πιέστε [
- Για να εισάγετε το 3D γράφημα ακολουθείστε την διαδρομή Insert/ Graph και επιλέξτε Surface Plot ή πιέστε ταυτόχρονα Ctrl και 2
- Στο μαύρο τετράγωνο που εμφανίζεται κάτω αριστερά πατήστε το πλήκτρο Z
- Κάνοντας κλικ έξω από το γράφημα θα εμφανιστεί στην οθόνη σας η γραφική παράσταση της  $z$  που είναι γνωστή ως «σέλλα».
- Μορφοποιείτε το γράφημα σας ακολουθώντας την διαδρομή Format/ Graph/ 3D Plot . Μεταβάλετε την Rotation σε 75 από το μενού View και δώστε χρώμα στο γράφημα σας από το μενού Color & Lines κάνοντας κλικ στην επιλογή Color.
- Για να σχεδιάσετε τις ισοϋψής της  $z$  ακολουθείστε την διαδρομή Insert/ Graph και επιλέξτε Contour Plot.



## Παράδειγμα 2

- Πληκτρολογήστε την απλή μορφή Cobb-Douglas του παραδείγματος μας
- Δώστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα διαστήματα τιμών για τις μεταβλητές  $K$ ,  $L$  καθώς και για τη συνάρτηση  $Y$
- Εισάγετε το 3D γράφημα καθώς και τις ισοϋψής καμπύλες
- Μορφοποιήστε το 3D γράφημα, δίνοντας του χρώμα και τίτλο από το μενού Format/ Graph/ 3D Plot. Στο μενού Color & Lines κάντε κλικ στην επιλογή Color και γράψτε το τίτλο του γραφήματος σας στο μενού Title. Κάντε κλικ στο Show Title και ορίστε που ακριβώς θέλετε να εμφανίζεται ο τίτλος σας.



### Παράδειγμα 3

- Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με τις προηγούμενες δύο γραφικές παραστάσεις και ορίζοντας τις τιμές για τις μεταβλητές και τη συνάρτηση όπως βλέπετε στο παραπάνω παράδειγμα θα οδηγηθείτε σε αυτή την υπέροχη τρισδιάστατη γραφική παράσταση.

## 10. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (για προχωρημένους)

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

The screenshot shows the Mathcad software interface with the following content:

**Παράδειγμα 1**

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} +$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \rightarrow 1$$

**Παράδειγμα 2**

$$f(t) := \ln(t)$$
$$\int_0^x f(t) dt \rightarrow \ln(x) \cdot x - x$$

**Παράδειγμα 3**

$$g(x, y) := x \cdot y + y^2 - 1$$
$$\int \int g(x, y) dx dy \rightarrow \frac{1}{4} x^2 \cdot y^2 + \frac{1}{3} y^3 \cdot x - x \cdot y$$

**Παράδειγμα 4**

$$g(x, y) := \cos(x) \cdot 3^y + x \cdot y$$
$$\int_0^1 \int_0^2 g(x, y) dx dy \rightarrow \frac{(3 \cdot \sin(2) + \ln(3))}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)} \cdot \sin(2) = 2.655$$

Press F1 for help. Auto NUM Page 1

#### Παράδειγμα 1

- Πληκτρολογήστε τη συνάρτηση  $f$  όπως φαίνεται στη παραπάνω εικόνα
- Εισάγετε το ολοκλήρωμα της  $f$
- Ορίστε τα όρια  
(το  $\infty$  εισάγεται με Ctrl και Z)
- Πληκτρολογήστε  $\rightarrow$  και πατώντας enter το ολοκλήρωμα θα έχει υπολογιστεί

#### Παράδειγμα 2

- Ορίστε την  $f$
- Εισάγετε το ολοκλήρωμα και ορίστε τα όρια
- Με το  $\rightarrow$  θα βρείτε το επιθυμητό αποτέλεσμα

#### Παράδειγμα 3

- Ορίστε τη  $g(x, y)$
- Εισάγετε διπλό ολοκλήρωμα πληκτρολογώντας δυο φορές Ctrl και I
- Με το  $\rightarrow$  θα δείτε τη λύση στην οθόνη σας

#### Παράδειγμα 4

- Ορίστε τη  $g(x, y)$
- Εισάγετε το διπλό ολοκλήρωμα πληκτρολογώντας δύο φορές Shift και 7 και δώστε τα κατάλληλα όρια για τα  $x, y$ .
- Με το  $\rightarrow$  θα δείτε το αριθμητικό αποτέλεσμα του ολοκληρώματος

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Mathcad - [Untitled:1]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Παράδειγμα 1

$$f(x) := 2^{\ln(x)}$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{2^{\ln(x)}}{x^2} \cdot \ln(2)^2 - \frac{2^{\ln(x)}}{x^2} \cdot \ln(2)$$

Παράδειγμα 2

$$f(x) := 2^{\ln(x)}$$
$$x := e$$
$$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{2}{e} \cdot \ln(2)$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \rightarrow \frac{2}{e^2} \cdot \ln(2)^2 - \frac{2}{e^2} \cdot \ln(2)$$

Press F1 for help. Auto NUM Page 1

### Παράδειγμα 1

- Ορίσετε την  $f$
- Βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της  $f$  πιέζοντας ταυτόχρονα Ctrl και Shift και / και δώστε στο δεξί κάτω εκθέτη τη τιμή 2
- Με το  $\rightarrow$  η δεύτερη παράγωγος της  $f$  θα έχει υπολογιστεί

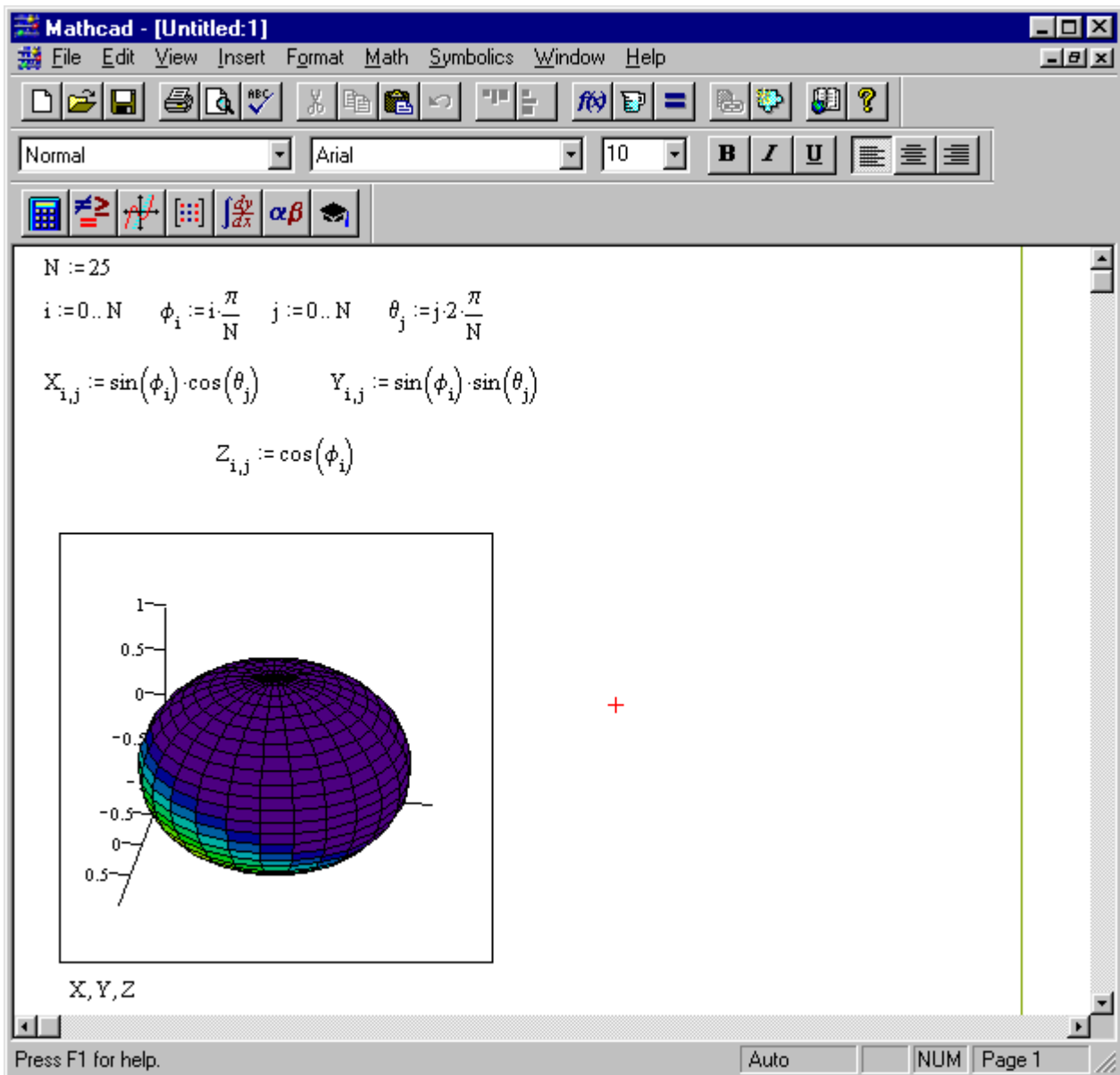
### Παράδειγμα 2

- Ορίσετε την  $f$
- Βρείτε τη πρώτη και δεύτερη παράγωγο
- Δώστε τη τιμή  $e$  στο  $x$

Βλέπεται ότι το Mathcad ταυτόχρονα σας δίνει τη τιμή της πρώτης και δεύτερης παραγώγου για αυτή τη συγκεκριμένη τιμή.



### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3



- Ορίσετε όλες τις μεταβλητές όπως φαίνονται στη παραπάνω εφαρμογή
  - Εισάγετε το 3D γράφημα
- Βλέπετε το γράφημα της σφαίρας να εμφανίζεται στην οθόνη του υπολογιστή σας.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

$x.. 1,2.. n$   
 $p(x) := \frac{1}{n}$   
 $\sum_{x=1}^n x \cdot p(x) \rightarrow \frac{1}{(2 \cdot n)} \cdot (n+1)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n}$   
 $\frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2}$   
 $\sum_{x=1}^n x^2 \cdot p(x) - \left( \sum_{x=1}^n x \cdot p(x) \right)^2 \rightarrow \frac{1}{(3 \cdot n)} \cdot (n+1)^3 - \frac{1}{(2 \cdot n)} \cdot (n+1)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{(n+1)}{n} - \left[ \frac{1}{(2 \cdot n)} \cdot (n+1)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n} \right]^2$   
 $\frac{1}{12} \cdot n^2 - \frac{1}{12}$

- Δώστε τιμές στο x όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα
  - Ορίστε τη  $p(x)$
  - Εισάγετε το άθροισμα πιέζοντας ταυτόχρονα Ctrl και Shift και 4
  - Ορίστε το άθροισμα όπως φαίνεται παραπάνω
  - Με το  $\rightarrow$  το Mathcad θα υπολογίσει το άθροισμα
- Βλέπετε ότι το αποτέλεσμα δεν έχει παραγοντοποιηθεί
- Επιλέξτε όλη τη παραπάνω παράσταση και καλέστε expand από το μενού Symbolic. Κάνοντας κλικ πάνω στο άθροισμα θα δείτε το τελικό αποτέλεσμα
  - Πληκτρολογήστε το τύπο της διακύμανσης όπως φαίνεται στο παράδειγμα
  - Με το  $\rightarrow$  θα δείτε το αποτέλεσμα
  - Επιλέγοντας πάλι όλη τη παραπάνω παράσταση και κάνοντας expand βρίσκουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα

Η παραπάνω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ήταν η ομοιόμορφη διακριτή κατανομή και εμείς υπολογίσαμε μέσω του Mathcad τη μαθηματική ελπίδα και τη διακύμανση αυτής της κατανομής.

## Ασκήσεις

### • Απλές Εφαρμογές

1. Βρείτε το αποτέλεσμα της παράστασης  $2^5 + \sqrt{5} - \ln(2) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2. Να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της παράστασης  $(x+5)^2 - \sqrt{x \cdot y} + \ln(z^2 + 1)$   
για  $x := -2$   $y := -8$   $z := 5$

3. Έστω η συνάρτηση  $f(x) := e^x \sin(x^2 + \pi)$

Να βρεθεί το  $f(\sqrt{\pi})$   $f(\pi)$  και το  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

4. Έστω ο 4x4 πίνακας  $A := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο  $A^{-1}$  καθώς και η ορίζουσα του A

5. Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5 \cdot x^2 + 3x - 2}{(x-2)^2}$

6. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) := \frac{\frac{\ln(x)}{\cos(x)} \cdot \sin(2 \cdot x)}{\sqrt{x}}$

7. Βρείτε το ολοκλήρωμα της  $g(x) := \sqrt{x^2 + x + 1}$

8. Δώστε το γράφημα της  $f(x) := x^2$

9. Δώστε το γράφημα της  $g(x) := e^x$

10. Δώστε το γράφημα της  $h(x) := f(x) - g(x)$

• Προχωρημένες Ασκήσεις και Οικονομικές Εφαρμογές

1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot y + 5 \cdot z &:= 1 \\ -2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 \cdot z &:= 2 \\ 3 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z &:= 4 \end{aligned}$$

2. Να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - x| + |x - 4| - 3 \cdot x}{x - 4}$$

3. Να βρεθεί η παράγωγος και το ολοκλήρωμα της  $f(x) := x \cdot \ln(x)$

4. Να βρεθεί η γραφική παράσταση της  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x < 0 \\ 5x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 4, & 1 < x \end{cases}$

5. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου  $p(x) := x^5 - 3 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 28 \cdot x + 24$

6. Να δειχθεί ότι ο πίνακας  $A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$  είναι διαγωνιοποιήσιμος

7. Παραγοντοποιήστε τη παράσταση  $x^5 - 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$

8. Εκτελέστε τις πράξεις:  $(x - 2)^5 \cdot (x - 1)^4 - (x - 3)^3$

9. Να δώσετε το γράφημα της  $z(x, y) := e^x \cdot \sin(y)$

10. Κάθε χρόνο το 12% του πληθυσμού εκτός Αθηνών εγκαθίστανται σε αυτήν και το 2% του πληθυσμού της την εγκαταλείπουν. Πως θα εξελιχθεί οριακά η κατάσταση.