ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Γράφημα συνάρτησης μιας μεταβλητής

Θα σχεδιάσομε με το Excel το γράφημα της συνάρτησης $y=\sin(x)$, $x\in[0,2\pi]$, για να επιδείξομε γενικότερα τη σχεδίαση του γραφήματος μιας συνεχούς συνάρτησης $y=f(x)$, $x\in[a,b]$.

Κατ' αρχήν θεωρούμε τη διαμέριση του πεδίου ορισμού $[0,2\pi]$ σε n+1=21 ισαπέχοντα σημεία, οπότε η συνάρτηση $y=\sin(x)$, πινακοποιείται σε 21 τιμές. Επομένως, οι τετμημένες είναι 0, 2π/20, 2*(2π/20), 3*(2π/20),...,20*(2π/20) και οι αντίστοιχες τεταγμένες υπολογίζονται επί των τετμημένων από το Excel. Η διαδικασία έχει ως εξής:

- Στο κελί A2 εισάγομε τον τύπο =2*PI()/20 που δίνει την τιμή 0.314.
- Εισάγομε στο κελί A4 την πρώτη τετμημένη, δηλαδή το αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού, που είναι ο αριθμός 0.
- Στο κελί B4 γράφομε τον τύπο =SIN(A4) και πιέζομε ENTER. Εμφανίζεται η τιμή 0.
- Εισάγομε στο κελί A5 τον τύπο =A4+A2 που δίνει τη δεύτερη τετμημένη.
- Στο κελί B5 γράφομε τον τύπο =SIN(A5) και πιέζομε ENTER. Εμφανίζεται η τιμή 0.3090. Βλέπετε τα μέχρι στιγμής παραγόμενα στο μαυρισμένο μέρος του παρακάτω παράθυρου.
- Αντιγράφομε τα κελιά A5 και B5 με *autofill* στην περιοχή A6:B24.

Τώρα αρχίζομε τη γραφική παράσταση:
- Κλικ στο Graph wizard
- Δημιουργούμε πλαίσιο για την εμφάνιση του γραφήματος
- Δηλώνομε την περιοχή τιμών που θα χρησιμοποιηθούν για το γράφημα:

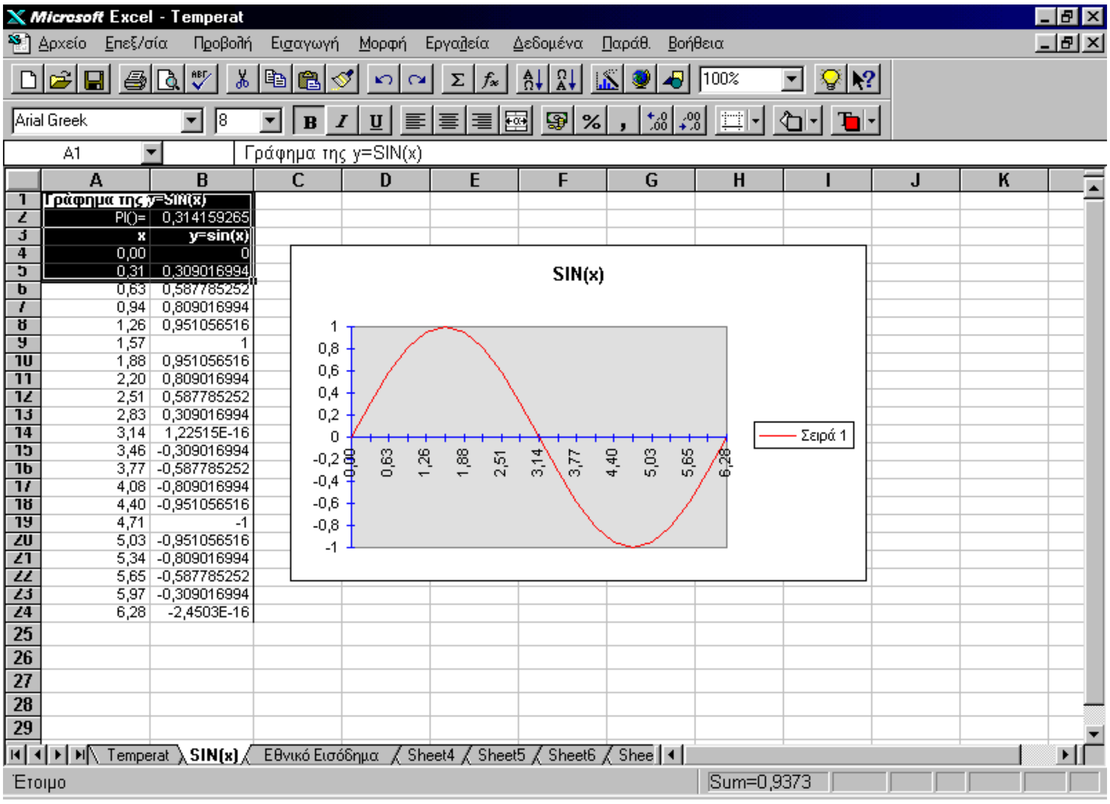
A4:B24 και Επόμενο
- Επιλέγομε «γραμμές», Επόμενο
- 2, Επόμενο
- Χρήση πρώτης [1] στήλης, Επόμενο
- Τίτλος γραφήματος: SIN(x). Ονομασία αξόνων *x* και *y*. Επόμενο
- Τέλος

Το γράφημα εμφανίζεται στο προκαθορισμένο πλαίσιο. Ενδεχομένως χρειασθεί να προσαρμόσομε το πλαίσιο και να αλλάξομε τη φόρμα εμφάνισης των αριθμών στις διαβαθμίσεις των αξόνων.

Είναι φανερό ότι η διαμέριση του πεδίου ορισμού παίζει σπουδαίο ρόλο στην ομαλή αναπαράσταση μιας καμπύλης. Αν είναι αραιή, τότε το γράφημα εμφανίζει γωνίες, ενώ αν είναι πυκνή, απαιτεί πολλά σημεία. Επομένως, χρειάζεται να σκεφθούμε λίγο πριν αρχίσομε τη γραφική απεικόνιση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δημιουργείστε το γράφημα της $f(x)=e^x$, $x\in[-1,2]$.
2. Δημιουργείστε το γράφημα της $f(x)=\ln x$, $x\in(0,20]$. Προσοχή, διότι ο λογάριθμος δεν ορίζεται στο μηδέν.
3. Δημιουργείστε το γράφημα της παραβολής $f(x)=2x^2+7$, $x\in[-5,5]$.
4. Σχεδιάστε την εφαπτόμενη της παραβολής $f(x)=2x^2+7$, $x\in[-5,5]$ στο σημείο $x=3$.
5. Δημιουργείστε το γράφημα της $f(x)=1/(3x^2-1)^2$, $x\in[-3,3]$.
6. Σχεδιάστε το γράφημα της $y=\pm\sqrt{x}$. Η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν υπάρχει στον πραγματικό χώρο.
7. Σχεδιάστε ένα κύκλο. Η εξίσωση που θα χρησιμοποιήσετε είναι $y=\pm\sqrt{(1-x^2)}$.


Microsoft Excel - Temperat
Αρχείο Επεξ/σία Προβολή Εισαγωγή Μορφή Εργαλεία Δεδομένα Παράθ. Βοήθεια
100%
Arial Greek
8
A1
Γράφημα της y=SIN(x)
A B C D E F G H I J K
Γράφημα της y=SIN(x)
PI()= 0,314159265
x y=sin(x)
0,00 0
0,31 0,309016994
0,63 0,587785252
0,94 0,809016994
1,26 0,951056516
1,57 1
1,88 0,951056516
2,20 0,809016994
2,51 0,587785252
2,83 0,309016994
3,14 1,22515E-16
3,46 -0,309016994
3,77 -0,587785252
4,08 -0,809016994
4,40 -0,951056516
4,71 -1
5,03 -0,951056516
5,34 -0,809016994
5,65 -0,587785252
5,97 -0,309016994
6,28 -2,4503E-16
SIN(x)
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,8
-1
0,00
0,63
1,26
1,88
2,51
3,14
3,77
4,40
5,03
5,65
6,28
Σειρά 1
Temperat
SIN(x)
Εθνικό Εισόδημα
Sheet4
Sheet5
Sheet6
Έτοιμο
Sum=0,9373

2. Παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών

Υποθέτομε ότι έχομε κάποιο τρόπο για να συλλέξομε τυχαία έναν αριθμό ρ από το σύνολο των αριθμών 1,2,...,Ν. Υπάρχουν απλοί μηχανισμοί γι' αυτήν την επιλογή όταν ο Ν είναι ένας μικρός συγκεκριμένος αριθμός. Παραδείγματος χάριν αν Ν=2, ρίχνομε ένα νόμισμα. Όταν Ν=6, ρίχνομε ένα ζάρι. Και όταν Ν=36, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε τον τροχό της ρουλέτας. Μια ακολουθία

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$$

τέτοιων ακεραίων καλείται *τυχαία ακολουθία*. Ένας αλγόριθμος που παράγει ένα τυχαίο αριθμό, ή έστω έναν προφανώς τυχαίο αριθμό, καλείται *γεννήτωρ τυχαίων αριθμών*. Για την πειραματική οικονομία, οι γεννήτορες τυχαίων αριθμών αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της εργαλειοθήκης της.

Εδώ παρουσιάζομε ένα γεννήτορα τυχαίων αριθμών κατανεμημένων ομοιόμορφα στο διάστημα [1,Ν], ο οποίος ορίζεται από μια *γραμμική αναδρομική* σχέση. Κάθε αριθμός της ακολουθίας, ρ_κ, υπολογίζεται από τον προηγούμενό του, $\rho_{\kappa-1}$, μέσω του τύπου

$$\rho_\kappa = (\rho_{\kappa-1}*\text{πολλαπλασιαστής}+\text{αύξηση}) \text{ MOD modulo}$$

Οι αριθμοί που παράγονται μ' αυτό τον τρόπο δεν είναι πραγματικά τυχαίοι υπό την έννοια της ρίψης ενός νομίσματος, ή ενός ζαριού, διότι πάντοτε μπορούμε να προβλέψομε την τιμή του ρ_κ δοσμένου του ρ_0. Η ακολουθία που παράγεται απ' αυτό τον τύπο πιο σωστά καλείται *ψευδοτυχαία* και οι αριθμοί ψευδοτυχαίοι.

Το Excel παρέχει τη δυνατότητα παραγωγής τυχαίων αριθμών, την οποία προσωπικά βρίσκω πολύ άβολη έως εκνευριστική. Είναι η συνάρτηση RAND() και της οποίας η τιμή μεταβάλλεται κάθε φορά που καλείται σε κάποιο τύπο. Προτείνω την επόμενη μέθοδο, η οποία θα δουλέψει σε κάθε υπολογιστή. Δημιουργεί 65536 τυχαίους αριθμούς πριν επαναλάβει τον εαυτό της και είναι πολύ βολική και εύχρηστη. Χρησιμοποιούμε

$$\text{modulo} = 2^{16} = 65536$$

$$\text{πολλαπλασιαστής} = 25173$$

$$\text{αύξηση} = 13849$$

και έχομε

$$\rho_\kappa = (\rho_{\kappa-1}*25173 + 13849) \text{ MOD } 65536$$

Αυτός ο υπολογισμός δεν θα δημιουργήσει υπερχείλιση σε όποιον υπολογιστή έχει

$$\text{maxint} \geq 2^{31}\text{-}1$$

Δίνομε στο ρ_0 την τιμή SEED, έστω SEED=1. Αυτή η διαδικασία παράγει μια αντιμετάθεση της ακολουθίας

$$1,2,\ldots,65535$$

και έπειτα επαναλαμβάνει τον εαυτό της. Η πρώτη τιμή της αντιμετάθεσης είναι η SEED. **Πολλές φορές χρειαζόμαστε ένα τυχαίο αριθμό μεταξύ 0 και 1**. Σ' αυτή την περίπτωση πρέπει να διαιρέσομε τον ρ_κ διά του 65535. Φυσικά το ίδιο πρέπει να κάνομε και για το ρ_0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Πως προσομοιώνεται η ρίψη ενός νομίσματος με τον παραπάνω τύπο;
2. Πως προσομοιώνεται η ρίψη ενός ζαριού με τον παραπάνω τύπο;
3. Πως προσομοιώνεται η στροφή της ρουλέτας με τον παραπάνω τύπο;

4. Δημιούργησε στο Excel 20 ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς με τον παραπάνω τύπο στο διάστημα (0,65535), όπου modulo=65536 και SEED=1. Τι ίδιο, δίπλα στη στήλη αυτή, αλλά με SEED=RAND().
5. Δημιούργησε στο Excel 20 ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς με τον παραπάνω τύπο στο διάστημα (0,1), όπου modulo = 65536 και SEED=1.
6. Δημιούργησε στο Excel 20 ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς με τον παραπάνω τύπο στο διάστημα (-1,1), όπου modulo = 65536 και SEED=1.
7. Τοποθέτησε τους αριθμούς της άσκησης 6 σε άξονες x-y, όπου οι τετμημένες θα είναι η φυσική ακολουθία 1,2,...,20. Τι παρατηρείς; Βλέπεις κάποια τάση; Μπορείς να υπολογίσεις το μέσο όρο, τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση της ακολουθίας, το διάμεσο;
8. Δημιούργησε στο Excel 20 ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς με τον παραπάνω τύπο στο διάστημα (-100,100), όπου modulo = 65536 και SEED=1.
9. Δημιούργησε στο Excel 30 ομοιόμορφα τυχαίους αριθμούς με τον παραπάνω τύπο στο διάστημα (-1,1), όπου modulo = 20 και SEED=1. Τι παρατηρείς;
10. Είναι λίγο δύσκολο, αλλά μπορείς να παράξεις μια ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση 0,5;

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Εθνικό εισόδημα και η μεταβολή του στο χρόνο

Το εθνικό εισόδημα αναπαρίσταται από τη λογιστική εξίσωση

$$Y_t=C_t+I_t+G_t,$$

όπου Y_t = εθνικό εισόδημα, C_t = έξοδα καταναλωτών, I_t = προσωπικές επενδύσεις, G_t = κρατικά έξοδα. Ο δείκτης t προσδιορίζει τη λογιστική περίοδο για την οποία η μεταβλητή εκτιμάται. Ο Samuelson (Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration, *Review of Economic Statistics*, 21 (1939), pp.75-78) αναλύει τη συμπεριφορά του εθνικού εισοδήματος και καταλήγει στην εξίσωση

$$Y_t = \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} +1,$$

όπου α είναι η οριακή τάση κατανάλωσης και β είναι μια θετική σταθερά ανάλογη στην αύξηση της κατανάλωσης της προηγούμενης περιόδου. Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **εξίσωση διαφορών**. Συνδέει το εθνικό εισόδημα οποιασδήποτε περιόδου με το εθνικό εισόδημα των δύο προηγούμενων περιόδων. Υποθέτομε ότι οι δύο αρχικές τιμές του εθνικού εισοδήματος δίνονται, ας πούμε Y_1 =2 και Y_2=3, και εξετάζομε τις ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις.

Αν α=0.5 και β=1 τότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$Y_t = Y_{t-1} - 0.5Y_{t-2} +1. \quad (1)$$

Θέτοντας t=3 και χρησιμοποιώντας τις αρχικές τιμές, λαμβάνομε

$$Y_3 = Y_2 - 0.5Y_1 +1= 3 - 0.5(2) +1 = 3.$$

Τώρα θέτομε t=4,5,6,... και υπολογίζομε Y_4=2.5, Y_5=2.0, Y_6=1.75,.... Τα αποτελέσματα δίνονται στη στήλη B του παρακάτω φύλλου του Excel.

Αν θεωρήσομε α=0.8 και β=2, ο τύπος (1) γίνεται

$$Y_t = 2.4Y_{t-1} - 1.6Y_{t-2} +1$$

και με τις ίδιες αρχικές τιμές των Y_1 και Y_2, υπολογίζομε Y_3=5, Y_5=8.2,... Οι πρώτες δώδεκα τιμές του Y_t δίνονται στη στήλη C του φύλλου του Excel.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχομε κυματιστή συμπεριφορά του εθνικού εισοδήματος ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο κυματισμός είναι μεγαλύτερος. Όμως 12 σημεία δεν είναι αρκετά για να πεισθούμε γι' αυτή τη συμπεριφορά. Φαίνεται πιθανόν να έχομε την περίπτωση όπου το εθνικό εισόδημα σταματά να κυματίζει σε κάποια χρονική στιγμή και σταθεροποιείται ή να μειώνεται σταθερά ή να αυξάνει σταθερά. Επεκτείνομε τα σημεία από 12 σε 20 και παρατηρούμε στην πρώτη περίπτωση σταθεροποίηση του εθνικού εισοδήματος στην τιμή 2. Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε απότομη μείωση και μάλιστα σε αρνητικούς αριθμούς. Φυσικά οι αριθμοί δεν αποδεικνύουν ότι η παρατηρηθείσα συμπεριφορά θα επεκτείνεται καθώς t αυξάνει πέραν της τιμής t=20. Ό,τι παρουσιάζομε είναι απλώς ένα πείραμα. Η γενίκευση ενδεχομένως οδηγήσει σε θεωρία.

Στα Μαθηματικά ΙΙΙ *αποδεικνύομε* αυτά τα πειραματικά συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δημιουργείστε πίνακες τιμών και γραφήματα για τα ανωτέρω επεκταμένα σύνολα σημείων.
2. Δοκιμάστε αντίστοιχους πίνακες τιμών για α=0.4 και β=1.
3. Πειραματιστείτε με τις εξής περιπτώσεις τιμών των α και β:

α	β
Τιμές που μειώνονται από 0.5 έως 0.	β=1

α=0.5	Τιμές που μειώνονται από 1 έως 0.
Τιμές που αυξάνονται από 0.5 έως 1.	*β*=1
α=0.5	Τιμές που αυξάνονται από 1 έως 5.